

উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্র

পরীক্ষণ -১::

পরীক্ষণের নামঃ Bisection method প্রয়োগ করে $x^3 - x - 1 = 0$ এর বাস্তব মূলের আসন্ন মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

মূলতত্ত্ব : $f(x) = x^3 - x - 1, x \in R$

আমরা জানি, $f(x)$ ফাংশন a ও b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a)$ ও $f(b)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে a ও b এর মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্ততঃ একটি বাস্তব মূল বিদ্যমান।

ধরি, মূলটির আসন্ন মান, $x_0 = \frac{a+b}{2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার

কার্যপদ্ধতি :

i) x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতिसঙ্গী (corresponding) মান নির্ণয় করি।

ii. খুবই নিকটবর্তী দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b নির্ণয় করি যেন $f(a)$ এবং $f(b)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

iii. a ও b এর গড় মান থেকে মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করি।

x	f(x)	সিদ্ধান্ত
a = 1	$f(1) = -1 < 0$	1 এবং 2 এর মধ্যে অতন্তঃ একটি বাস্তব মূল আছে।
b = 2	$f(2) = 5 > 0$	
$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$	$f(1.5) = 0.875 > 0$	মূলটি 1 এবং 1.5 এর মধ্যে আছে।
$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$	$f(1.25) = -0.2968 < 0$	মূলটি 1.5 এবং 1.25 এর মধ্যে আছে।
$x_2 = \frac{1.5+2.5}{2} = 1.375$	$f(1.375) = 0.2246 > 0$	মূলটি 1.25 এবং 1.375 এর মধ্যে আছে।
$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125$	$f(1.3125) = -0.5151 < 0$	মূলটি 1.375 এবং 1.3125 এর মধ্যে আছে।
$x_4 = \frac{1.375+1.3125}{2} = 1.34375$	$f(1.34375) = 0.08261 > 0$	মূলটি 1.3125 এবং 1.34375 এর মধ্যে আছে।
$x_5 = \frac{1.3125+1.34375}{2} = 1.328125$	$f(1.328125) = 0.01457 > 0$	মূলটি 1.3125 এবং 1.328125 এর মধ্যে আছে।
$x_6 = \frac{1.3125+1.328125}{2} = 1.3203125$		

ফলাফল : দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মূলের আসন্ন মান, $y = 1.32$

সীমাবদ্ধতা : কোনো সমীকরণের একাধিক বাস্তব মূল থাকলেও এই পদ্ধতিতে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধিতে একটি বাস্তবমূল নির্ণয় করা যায়।

সতর্কতা :

- পেন্সিলটিকে ভালভাবে শার্প করে নিতে হবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সঠিকভাবে হিসাব করতে হবে।
- বাস্তব মূলের আসন্ন মান নির্ধারিত স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

পরীক্ষণ -২::

পরীক্ষণের নামঃ $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

মূলতত্ত্বঃ $y^2 = 8x + 5$ বা $y = \pm\sqrt{8x + 5}$

প্রয়োজনীয় উপকরণঃ i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার

স্কেল নির্ধারণঃ x ও y অক্ষ বরাবর প্রতি ক্ষুদ্র 1 বর্গঘর = 1 একক

কার্যপদ্ধতি :

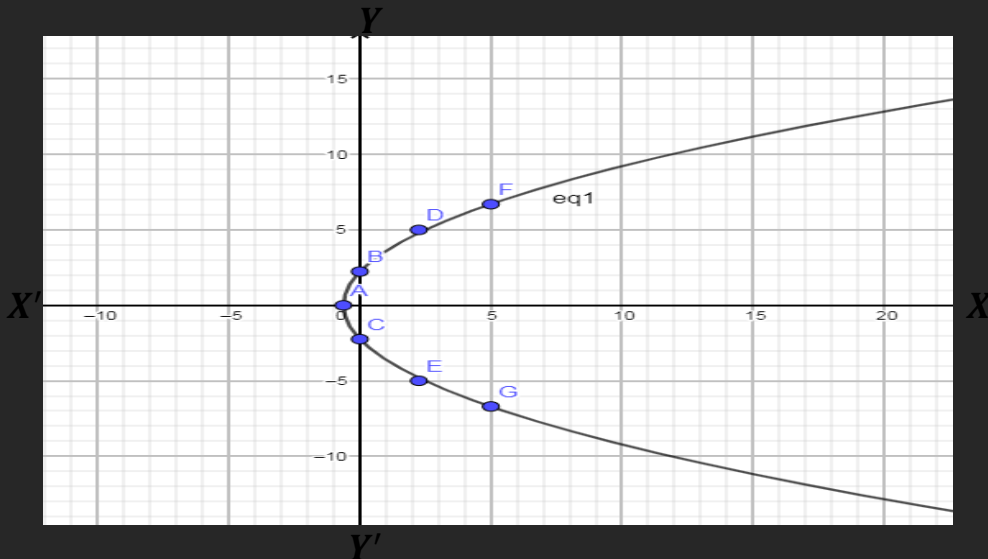
- প্রদত্ত সমীকরণ হতে x- এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y- এর বাস্তব মান নির্ণয় করি।
- ছক কাগজ বিন্দুগুলি স্থাপন করি।
- সরু শিষ্যযুক্ত পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলো সংযোজন করে নির্ণয় লেখ চিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

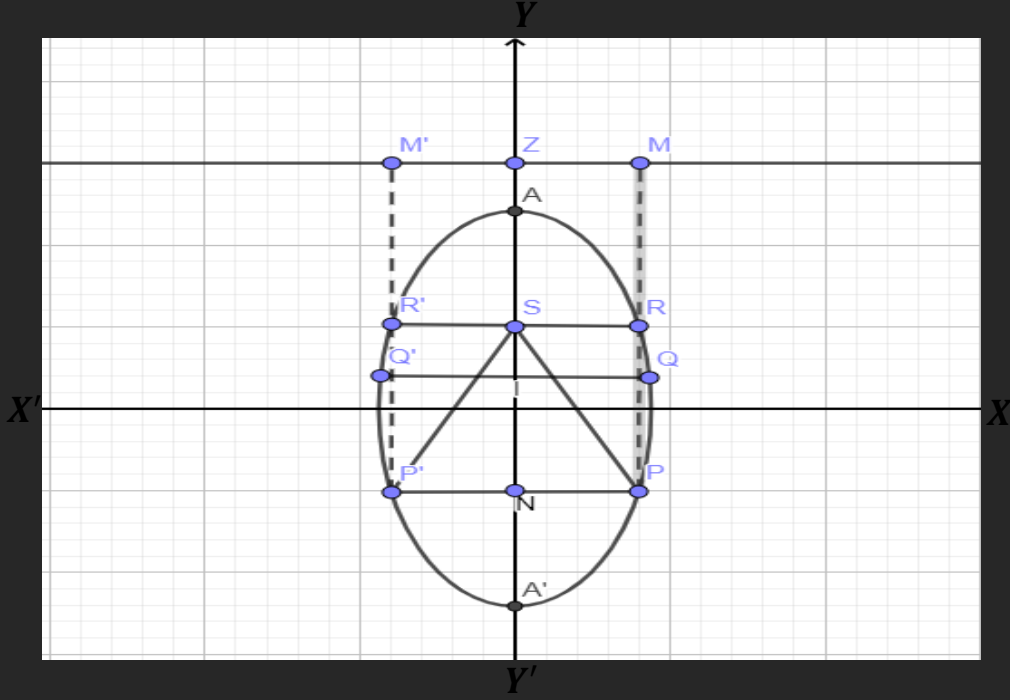
x	-0.63	0	2.5	5
$y = \pm\sqrt{8x + 5}$	0	± 2.24	± 5	± 6.7

iv. স্থাপিত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক

A(-0.63, 0), B(0, 2.24), C(0, -2.24), D(2.5, 5), E(2.5, -5), F(5, 6.7), G(5, -6.7)



- v. AA' এর ওপর N যেকোনো বিন্দু নিয়ে PNP' লম্ব আঁকি। এখন S কে কেন্দ্র করে $\frac{1}{2} = ZN$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা PNP' লম্বকে P এবং P' বিন্দুতে ছেদ করে। S, P এবং S, P' যোগ করি। P এবং P' হতে নিয়ামকের উপর যথাক্রমে PM এবং $P'M'$ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে $SP = \frac{1}{2} PM$ এবং $SP' = \frac{1}{2} P'M'$ ।
- vi. AA' রেখার ওপর N_1, N_2 বিন্দু নিয়ে কার্যপদ্ধতি (v) অনুসারে Q, Q' এবং R, R' বিন্দুগুলি পাওয়া যায়।
- vii. A, R, Q, P, A', Q', R' এবং A বিন্দুগুলি পর্যায়ক্রমে যোগ করে যে আবদ্ধ বক্ররেখা পাওয়া যায় তাই নির্ণেয় উপবৃত্তের লেখচিত্র। যার উপকেন্দ্র $S(0,2)$ এবং নিয়ামকে রেখা MZM' ।



সতর্কতা :

- সুযম লেখ কাগজ ব্যবহার করতে হবে।
- পেন্সিলটিকে ভালভাবে শার্প করে নিতে হবে।
- ফাংশন থেকে ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সঠিকভাবে x এবং y এর মান নির্ণয় করতে হবে।
- ফাংশন সঠিকভাবে লেখচিত্র স্কেল নির্ধারণ অনুসারে স্থাপন করতে হবে।
- মুক্ত হস্তে বিন্দুগুলো সংযোজন করে কণিকাটি অঙ্কন করতে হবে।

পরীক্ষণ -৪::

পরীক্ষণের নামঃ $y = \sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

মূলতত্ত্ব : $\sin x$ ফাংশনটি $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে এক -এক এবং এর রেঞ্জ $[-1, 1]$

কাজেই $\sin^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন = $[-1, 1]$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার

কার্যপদ্ধতি :

i) গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে x - অক্ষ এবং y - অক্ষ চিহ্নিত করি।

ii. x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \sin^{-1}x$ হতে y এর মান নির্ণয় করি।

iii. প্রাপ্ত (x,y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে x - অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর 1 ঘর = 10 একক স্কেলে স্থাপন করি।

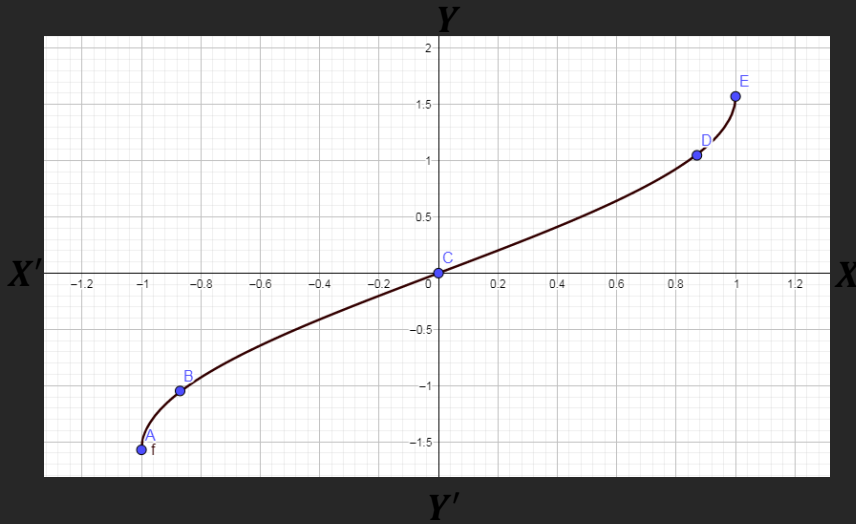
iv. একটি সরু শীষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে মসৃন বক্ররেখার সাহায্যে বিন্দুগুলি সংযোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্রে অঙ্কন করি।

ফল সংকলন :

x	-1	-0.87	0	0.87	1
$y = \sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

v. লেখচিত্রে স্থাপিত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক

$A(-1, -\frac{\pi}{2}), B(-0.87, -\frac{\pi}{3}), C(0,0), D(0.87, \frac{\pi}{3}), E(1, \frac{\pi}{2})$



সতর্কতা :

i. বিন্দুগুলির মান নির্ণয়ে সতর্কতা করতে হবে।

ii. ফাংশনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করে ফাংশনের লেখের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

iii. বিন্দুগুলি যোগের সময় সাবধনতা অবলম্বন করতে হবে।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

i. $x \in [-1, 1]$ এর জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

ii. $\sin(\sin^{-1}x) = x$ যখন $-1 \leq x \leq 1$

iii. $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ যখন $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

পরীক্ষণ -৫

পরীক্ষণের নামঃ একই সময়ে বিন্দুতে 120 N ও 100 N মানের দুইটি বল পরস্পরের মধ্যে 50° কোণে ক্রিয়ারত হলে

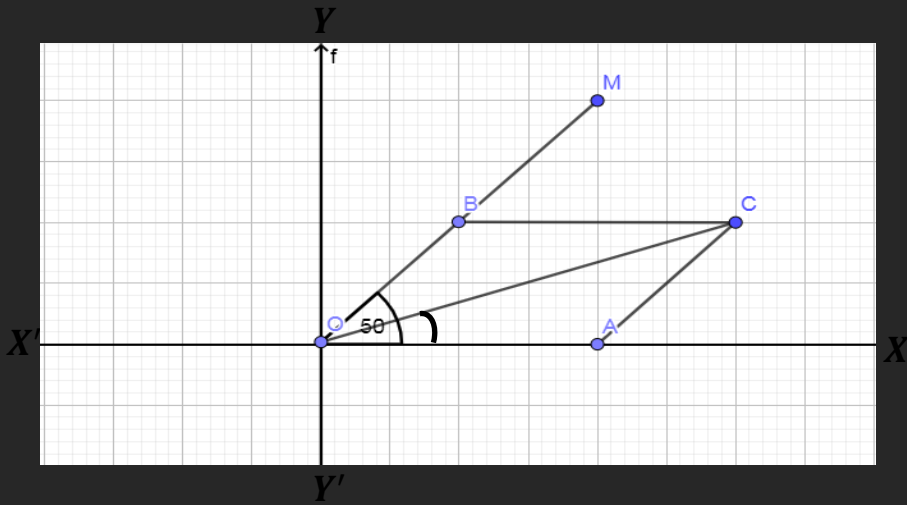
লৈখিক পদ্ধতিতে তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : একই সময়ে কোনো বিন্দুতে ত্রিভুজাঙ্গী দুইটি সমজাতীয় বলকে কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে প্রকাশ করা গেলে সামান্তরিকটির কর্ণ বলদ্বয়ের লব্ধিকে মানে ও দিকে প্রকাশ করে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার

কার্যপদ্ধতি :

১. গ্রাফ পেপারে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি এবং ক্ষুদ্রতম 1 বর্গবাহু = 4N স্কেল নির্ধারণ করি।
২. OX এর রেখার সাথে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে 50° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ OM রেখাংশ অংকন করি।
৩. OX হতে OA = 120N = 30 বর্গবাহু কেটে নিই এবং OM হতে OB = 100 N = 25 বর্গ বাহু কেটে নিই। OA এবং OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক অংকন করি এবং OC কর্ণ আঁকি যাহা X অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



ফল সংকলনঃ

লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়

P	Q	α	লব্ধির R মান নিণয়		লব্ধির θ মান নিণয়	
			গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
120N	100N	50°	$R = OC$ $= 49.9$ $= 49.9 \times 4N$ $= 199.36N$	$R = \sqrt{p^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$ $R = \sqrt{120^2 + 100^2 + 2 \cdot 120 \cdot 100 \cos 50^\circ}$ $R = \sqrt{14400 + 10000 + 24000 \times .64}$ $R = \sqrt{39760}$ $= 199.40 N$	চাঁদার সাহায্যে $\angle AOC = \theta$ $= 23^\circ$	$\theta = \tan^{-1} \frac{Q \sin \alpha}{Q \cos \alpha}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{100 \cdot \sin 50^\circ}{120 + 100 \cos 50^\circ}$ $= \tan^{-1}(.42)$ $= 22^\circ 47'$

ফলাফল : \therefore নির্ণেয় লব্ধির মান 199.40 N এবং দিক 23° (প্রায়)

মন্তব্য : কম্পাসের সাহায্যে OC এর দৈর্ঘ্য বের করে তা O বিন্দু থেকে OX বরাবর বসিয়ে গ্রাফ পেপারের ক্ষুদ্রতম কত বর্গ বাহুর সমান তা নির্ণয় করি এবং চাঁদার সাহায্যে $\angle AOC = \theta$ নির্ণয় করি।