উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

পরীক্ষণ -০১::

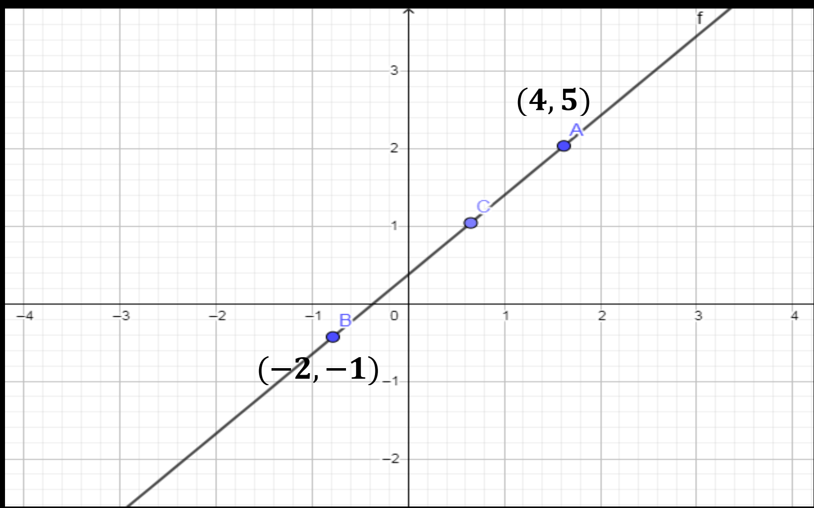
পরীক্ষণের নামঃ (4,5) এবং (-2,-1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি 1: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

মূলতত্ত্ব ঃ B(x_1, y_2) ও B(x_1, y_2)বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ C(x,y) বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে x = $\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$ এবং y = $\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার vii) রঙিন পেন্সিল

কার্যপদ্ধতি ঃ i. গ্রাফ পেপারে XOX'এবং YOY' সরলরেখা দ্বারা যথাক্রমে অক্ষ x- ও y- অক্ষ চিহ্নিত করি, যেখানে O হলো মূলবিন্দু যার স্থানাঙ্ক (0,0)।

ii. x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে A(4 , 5) ও B(-2,-1) বিন্দুদ্বয় স্থাপন করি।



iii. Aও B বিন্দুদ্বয় যোগ করে AB সরলরেখা আকি।

iv. তত্ত্বে উল্লেখিত সূত্রের সাহায্যে AB রেখাংশকে 1 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

v.বিভক্তকারী বিন্দুটির নামকরণ করি। ধরি বিন্দুটি C ।

vi. ছক কাগজে বিন্দুটিকে চিহ্নিত করি।

ফল সংকলনঃ i. সূত্রের সাহায্যে :

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	m_1	m_2	x = $\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$	y = $\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$	(x,y)
(4,5)	(-2, -1)	1	3	x = $\frac{1(-2)+2.4}{1+3} = \frac{3}{2}$	y = $\frac{1(-1)+2.5}{1+3} = \frac{9}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

ii. সূত্রের সাহায্যে ব্যতীরেকে(অর্থাৎ লেখচিত্র হতে) :

AB রেখাংশকে স্কেল দ্বারা মেপে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে, A হতে B এর দিকে 1 ঃ 3 অনুপাতে এই অংশ বিবেচনা করে রেখাংশের ওপর বিভক্ত বিন্দুকে C নামকরণ করি। এখন C হতে অক্ষের x- ও অক্ষের ও y- অক্ষের ওপর যথাক্রমে CD ও CE লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে OD ও OE হচ্ছে C বিন্দুটির ভুজ ও কোটি।

বিবেচ্য স্কেল অনুযায়ী , OD=1.4 এবং OE = 2.20

সুতরাং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1.4 , 2.20)

iii ফলাফল ঃ

নির্ণেয় অন্তবিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

মন্তব্য ঃ

যেহেতু সূত্র দ্বারা ও সূত্রের সাহায্যে ব্যাতীরেকে প্রাপ্ত বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্কের পার্থক্য অতি নগন্য। অত্রএব, প্রাপ্ত ফলাফল গ্রহণযোগ্য।

সতর্কতাঃ

i. সরু শীষযুক্ত পেন্সিল ব্যবহার।

ii. বিন্দুগুলি সতর্কতার সাথে স্থাপন করে পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করতে হবে।

iii. স্কেল ব্যবহার করে রেখাংশটিকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করার ক্ষেত্রে সাবধনতা অবলম্বন করতে হবে।

iv. স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্র সঠিকভাবে প্রয়োগ করতে হবে।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

i). রেখাটি উভয় অক্ষকে ছেদ করে।

ii. (4,5) বিন্দুর চিহ্ন (+ve ,+ve) আকারের হওয়ায় বিন্দুটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং(-2, -1) বিন্দুর চিহ্ন (-ve, - ve) আকারের হওয়ায় বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

iii. অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

iv. রেখাংশটিকে $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ বিন্দুটি 1 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে অর্থাৎ সম্পূর্ণ রেখাংশকে তিন অংশ ধরলে এই বিন্দুর একপার্শ্বে 1 অংশ ও অপরপার্শ্বে 3 অংশ আছে।

v. অঙ্কন অনুসারে বিন্দুটির নিচের অংশে 3 ভাগ ও ওপরের অংশে 1 ভাগ আছে।

পরীক্ষণ -০২

পরীক্ষণের নাম ঃ $(x-4)^2+(y-5)^2=10^2$ সমীকরণ বিশিষ্ট বৃত্তের লেখচিত্র নির্ণয়।

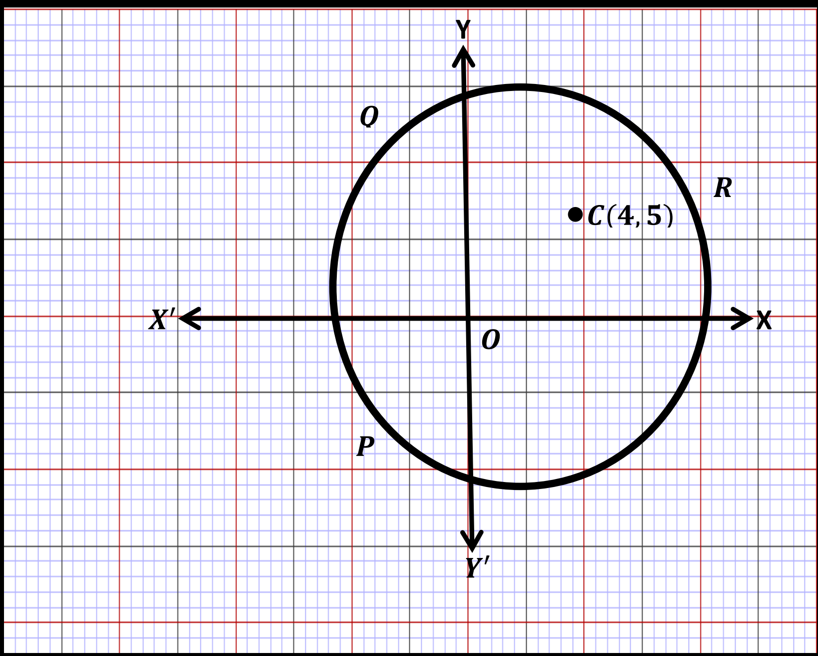
মূলতত্ত্ব ঃ $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ সমীকরণ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র (a, b) এবং ব্যাসার্ধ r ।

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (4,5) এবং ব্যাসার্ধ 10 একক।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) পেন্সিল কম্পা (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটার।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. গ্রাফ পেপার পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি।
2. গ্রাফ পেপারে অক্ষ X-ও Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গবাহু = 1 একক ধরে বৃত্তের কেন্দ্র C(4,5) নির্ণয় করি।
3. এখন (4,5) বিন্দুকে কেন্দ্র করে 10 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে PQR বৃত্ত অংকন করি।



ফলাফলঃঃ PQR বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত ।

পরীক্ষণ নং-০৩

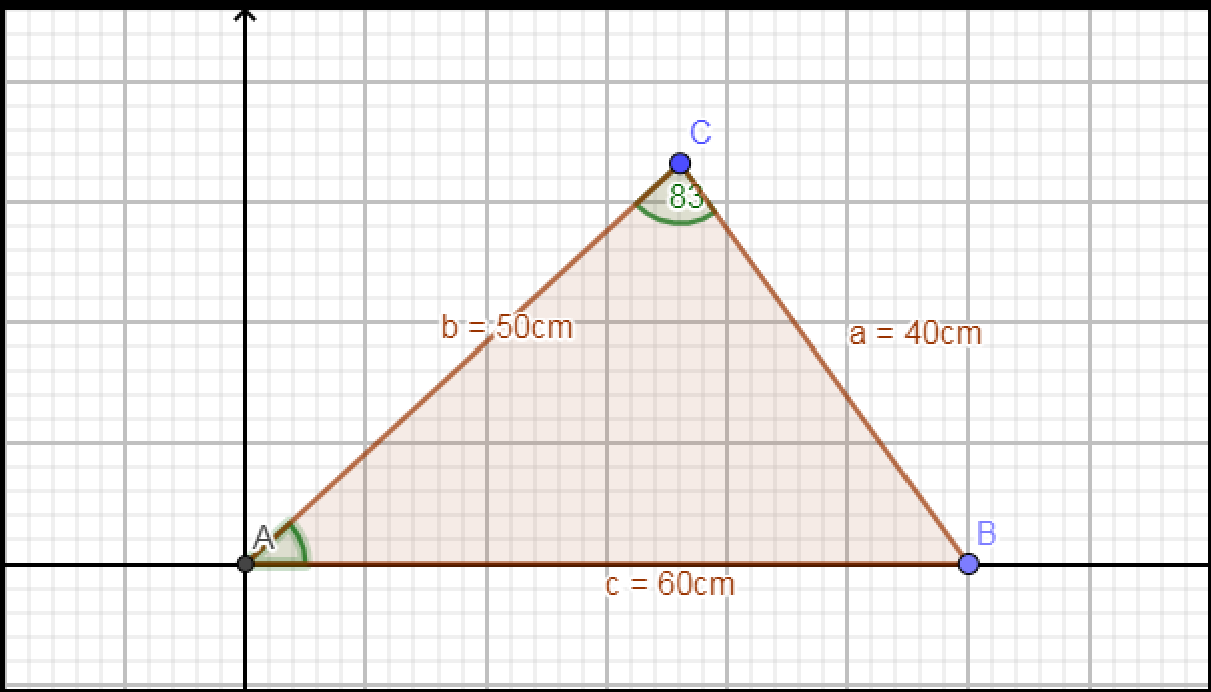
পরীক্ষণের নাম ঃ কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনেকরি, $\triangle ABC$ একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমের $a = 40$ সে.মি. , $b = 50$ সে.মি. এবং $c = 60$ সে.মি. । $\triangle ABC$ তে বৃহত্তম বাহু $c = 60$ সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতম বাহু $a = 40$ সে.মি.। আমরা জানি, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে $\triangle ABC$ অংকন করে চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle c$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle a$ নির্ণয় করি এবং সূত্র থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) পেন্সিল কম্পাস (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটার (vi) চাঁদা (vii) গ্রাফ পেপার

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. গ্রাফ পেপার পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি। এবং ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ বাহু= 2 সে. মি. স্কেল নির্ধারণ করি।
2. গ্রাফ পেপারে অক্ষ AX বরাবর বৃহত্তম বাহু AB = 60 সে. মি. = 30 বর্গ কেটে নিই।
3. এখন A কে কেন্দ্র করে (50÷ 2 =25) ক্ষুদ্রতম 25 বর্গ বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং B কে কেন্দ্র করে (40÷ 2 =20) ক্ষুদ্রতম 20 বর্গবাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A,C এবং B,C যোগ করি। তাহলে $\triangle ABC$ তে AC = b = 50 সে.মি. BC = a = 40 এবং AB= c =60 সে.মি. সূচিত হয়।
4. চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle C$ এবং $\angle A$ নির্ণয় করি।



হিসাব ঃ

বৃহত্তম C কোণ নির্ণয়ের সূত্র ঃ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

বা, $\cos C = \frac{40^2+50^2-60^2}{2\times40\times50}$

$= \frac{1600+2500-3600}{4000}$

$= \frac{500}{4000}$

বা, $\cos C = 0.125$

বা, $C = \cos^{-1}(0.125)$

$\therefore$ বৃহত্তম C কোণ $= 82^0 49' 9''$

ক্ষুদ্রতম A কোণ নির্ণয়ের সূত্র ঃ

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

বা, $\cos A = \frac{50^2+60^2-40^2}{2\times50\times60}$

$= \frac{2500-3600-1600}{6000}$

$= \frac{4500}{6000}$

বা, $\cos A = 0.75$

বা, $A = \cos^{-1}(0.75)$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম A কোণ $= 41^0 24' 35''$

ফল সংকলন ঃ

a	b	c	বৃহত্তম কোণ ∠C নির্ণয়		ক্ষুদ্রতম কোণ ∠A নির্ণয়	
			গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
40 সে.মি.	50 সে.মি.	60 সে.মি.	$\angle C = 83°$	$\angle C = 82^0 49' 9''$	$\angle A = 41^0 30'$	$\angle A = 41^0 24' 35''$

ফলাফল ঃ $\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম কোণ $\angle C = 83°$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A = 41^0 30'$

মন্তব্য ঃ লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিক ভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান, অতএব ফলাফল সঠিক।

পরীক্ষণ নং-৪

পরীক্ষণের নাম ঃ $\triangle ABC$ তে $a = 20$ সে.মি., $c= 15$ সে.মি. এবং $\angle b = 60°$ হলে ত্রিভুজটি সমাধন করতে হবে।

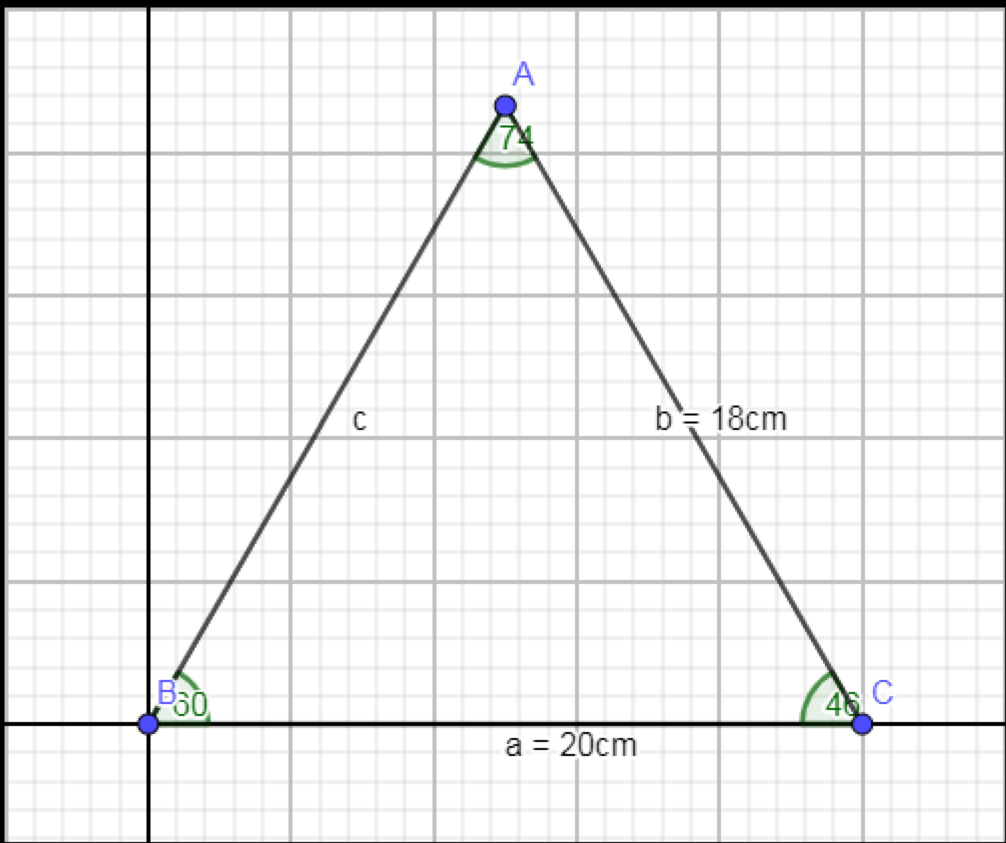
মূলতত্ত্ব ঃ দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ তে $a = 20$ সে.মি., $c= 15$ সে.মি. এবং $\angle b = 60°$

আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ এবং $b^2=c^2+a^2 - 2ca \cos B$ সূত্রদ্বয় ব্যবহার করে যথাক্রমের $\angle A, \angle C$ এবং b এর নির্ণয় করে তা গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) পেন্সিল কম্পাস (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটার (vi) চাঁদা (vii) গ্রাফ পেপার

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. গ্রাফ পেপারে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় অংকন করি।
2. গ্রাফ পেপারের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ বাহু = 1 সে.মি. ধরে $\triangle ABC$ অংকন করার জন্য BX বরাবর ক্ষুদ্রতম ২০ বর্গবাহুর সমান করে $BC = a = 20$ সে.মি. কেটে নিই।
3. BC রেখার B বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে $\angle CBD = 60°$ কোণ অংকন করি।
4. BD রেখা হতে ক্ষুদ্রতম 15 বর্গবাহুর সমান করে $BA = c = 15$ সে.মি. কেটে নিই। A,C যোগ করি।
5. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A, \angle C$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



হিসাব ঃ

আমরা জানি, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$=15^2 = 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \cos 60°$

$= 225+400-600(0.5)$

$= 225+400-300$

বা, $b^2 = 325$

$\therefore$ b = 18 সে.মি. (প্রায়)

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

বা, $\frac{20}{\sin A} = \frac{18}{\sin 60°}$

বা, $18 \times \sin A = 20 \times \sin 60°$

বা, $18 \times \sin A = 20 \times .866$

বা, $\sin A = \frac{17.32}{18}$

বা, $\sin A = 0.962$

বা, $A = \sin^{-1}(0.962)$

$\therefore$ A কোণ $= 74^0 9' 15''$

অনুরূপভাবে,

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

বা, $\frac{18}{\sin 60°} = \frac{15}{\sin C}$

বা, 18 sine C = 15 × sin 60°

বা, sine C = $\frac{18.99}{18}$

বা, sine C = 0.722

বা, $C = \sin^{-1}(0.722)$

$\therefore$ C কোণ $= 46^0 13' 11''$

ফল সংকলন ঃ

a	c	∠B	b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়	∠A কোণ নির্ণয়	∠C কোণ নির্ণয়
20	15	60°	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ b= ক্ষুদ্রতম 18 বর্গবাহু = 18 সে.মি.	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ ∠A= 74°	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ ∠C= 46°
			সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ b= 18 সে.মি. (প্রায়)	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ A কোণ = $74^0 9' 15''$	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ C কোণ = $46^0 13' 11''$

ফলাফল ঃ $\therefore$ নির্ণেয় b= 18 সে.মি., ∠A= 74° এবং ∠C= 46°

মন্তব্য ঃ লেখচিত্র থেকে মান এবং গাণিতিক ভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান, অতএব ফলাফল সঠিক।

পরীক্ষণ -০৮

পরীক্ষণের নামঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_1^{10} \sqrt{x}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল A = $\int_1^{10} \sqrt{x}\, dx$

∴ ছয়টি কোটির জন্য ট্রাপিজিয়াম সূত্র, A = h $(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$ ব্যবহার করে A এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ

i) পেন্সিল ii) স্কেল iii) ইরেজার iv) শার্পনার v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর vi) গ্রাফপেপার vii) রঙিন পেন্সিল

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. 1 ≤ x ≤ 10 ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 6টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই ব্যবধির উর্ধ্বসীমা ও নিন্মসীমার বিয়োগফলকে (6-1) = 5 দ্বারা ভাগ করা প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

∴ h = $\frac{10-1}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$

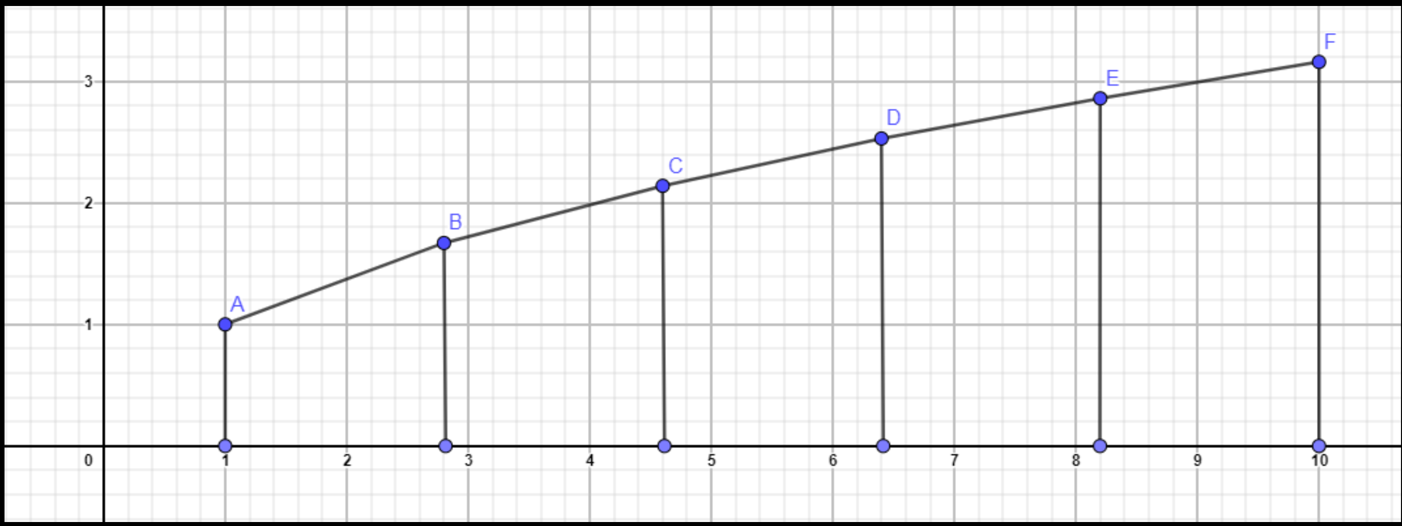
2. h এর মান হতে $x_n = x_n - 1 + h$ সূত্র প্রয়োগ করে $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1$ ।

৩. y = f(x) = $\sqrt{x}$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয়ঃ

x_0=1	$x_1 = x_0 + h$ = 1+1.8 = 2.8	$x_2 = x_1 + h$ = 2.8+1.8 = 4.6	$x_3 = x_2 + h$ = 4.6+1.8 = 6.4	$x_4 = x_3 + h$ = 6.4+1.8 = 8.2	$x_5 = x_4 + h$ = 8.2+1.8 10
$y_0 = \sqrt{x_0}$ = $\sqrt{1}$ = 1	$y_1 = \sqrt{x_1}$ = $\sqrt{2.8}$ = 1.67	$y_2 = \sqrt{x_2}$ = $\sqrt{4.6}$ = 2.14	$y_3 = \sqrt{x_3}$ = $\sqrt{6.4}$ = 2.53	$y_4 = \sqrt{x_4}$ = $\sqrt{8.2}$ = 2.83	$y_5 = \sqrt{x_5}$ = $\sqrt{10}$ = 3.16

4.গ্রাফ পেপার X অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ বাহু = 1 এবং Y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ বাহু= 1 একক ধরে প্রাপ্ত A(1,1) , B(2.5, 1.67) , C(4.6, 2.14), D(6.4, 2.53), E(8.2, 2.86), F(10,3.16) বিন্দুগুলি স্থাপন করে রঙিন পেন্সিল দিয়ে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত 6টি কোটিকে X অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাফিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।



হিসাবঃ ছয়টি কোটির জন্য ট্রাপিজিয়াম সূত্র A= h $\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right)$

$= 1.8\left(\frac{1}{2} + 1.67 + 2.14 + 2.53 + 2.86 + \frac{3.16}{2}\right)$

$= 20.30$ বর্গএকক (প্রায়)

ফলাফল ঃ $\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = \int_1^{10} \sqrt{x}\, dx = 20.30$ বর্গএকক (প্রায়)

মন্তব্য ঃ n যত বৃহৎ হবে h তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।