উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)

অধ্যায়-১ঃ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

ম্যাট্রিক্স

❖ **ম্যাট্রিক্স ঃ** সারি ও কলাম আকারে সাজানো কতগুলো সংখ্যা বা তথ্যের সমাহারকে ম্যাট্রিক্স বলে।

- একজন শিক্ষার্থীর পড়ার রুটিন---- কলাম বরাবর ---দিন
  সারি বরাবর---বিষয়

	Sat	Sun	Mon	tues
Physics	2	3	2	4
Math	3	2	3	2
Biology	1	1	4	3
English	4	4	1	1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 x 3(3 by 3)

সারি

কলাম

ভুক্তি

- ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি সংখ্যা উহার সারি এবং কলাম সংখ্যার গুনফলের সমান ।
- ম্যাট্রিক্সকে $(\quad)$, $[\quad]$, $\|\quad\|$ বন্ধনী দ্বারা প্রকাশ করা হয়
  ।

❖ **ম্যাট্রিক্সের ক্রম :** ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যাকে একত্রে ইহার ক্রম বলে।

- যেমন ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সারি দুটি এবং কলাম তিনটি।
- **সুতরাং ইহার ক্রম = 2×3(2 by 3)।**

❖ **বর্গ ম্যাট্রিক্স ঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা পরস্পর সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 9\\ -5 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

❖ **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স ঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা পরষ্পর সমান নয়, তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

❖ **দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ করার শর্ত :** দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ ও বিয়োগ করা যাবে, যদি তাদের ক্রম সমান হয়।

$$A = \begin{bmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 4 & 8\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}-4 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 7\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ এবং বিয়োগ করা যাবে । কারন তাদের ক্রম সমান ।

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ এবং বিয়োগ করা যাবে না । কারন তাদের ক্রম সমান নয় ।

❖ **ম্যাট্রিক্সের যোগ নির্ণয় :ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম এর অনুরুপ উপাদান যোগ করে বসাতে হয় ।**

$3+4=7$

$$\begin{bmatrix}3 & 8\\ 4 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 8\\ 5 & -3\end{bmatrix}$$

❖ **ম্যাট্রিক্সের বিয়োগ নির্ণয় :ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম এর অনুরুপ উপাদান বিয়োগ করে বসাতে হয় ।**

❖

$3-4=-1$

$$\begin{bmatrix}3 & 8\\ 4 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 8\\ 3 & 15\end{bmatrix}$$

❖ **সারি ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের কেবল মাত্র একটি সারি বিদ্যমান তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

❖ **কলাম ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের কেবল মাত্র একটি কলাম বিদ্যমান তাকে কলাম ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

❖ **ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স :** কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলাম আন্তঃপরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

❖ **শূন্য ম্যাট্রিক্স :** কোন ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শূন্য হলে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ইহা ৩×৩ ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স

❖ **প্রধান কর্ণ :** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের a_{11} a_{22}.........a_{nn} ভুক্তি নিয়ে যে কর্ণ গঠিত হয় তাকে প্রধান কর্ণ বলে ।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

প্রধান কর্ণ a_{11} a_{22}.........a_{33}

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} 2,1,3 \qquad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} 9,5$$

❖ **ম্যাট্রিক্সের ট্রেস :** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তি সমূহের যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলে ।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$ এই ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস হল 8+1+8=17

❖ **উর্ধ্ব ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিম্নস্থ সকল ভূক্তি শূন্য তাকে উর্ধ্ব ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **নিম্ন ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরস্থ সকল ভূক্তি শূন্য তাকে নিম্ন ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **কর্ণ ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণ ব্যতীত সকল ভূক্তি শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **স্কেলার ম্যাট্রিক্স :** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক ভূক্তি সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

❖ **একক ম্যাট্রিক্স :** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক ভূক্তি 1 তাকে একক ম্যাট্রিক্স বলে ।

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইহাকে I_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয় । $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইহাকে I_2 দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

ম্যাট্রিক্সের গুণ

❖ **দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণ :** দুটি ম্যাট্রিক্স গুণনযোগ্য হবে যদি প্রথমটির কলামের সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স গুন করা যাবে । কারন তাদের প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স গুন করা যাবে না ।কারন তাদের প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান নয়।

❖ **গুণফল ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয়** :দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করলে নতুন যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে তার মাত্রা হবে প্রথমটির সারি এবং দ্বিতীয়টির কলাম সংখ্যার সমান । যেমন---

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{2 \times 2}$$

2 x 2 2 x 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \boxed{2 \times 2}$$

2 x 3 3 x 2

❖ সসীম ম্যাট্রিক্স: কোনো ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলাম সসীম হলে তাকে সসীম ম্যাট্রিক্স বলে ।

❖ অসীম ম্যাট্রিক্স: কোনো ম্যাট্রিক্সের সারি বা কলাম অসীম হলে তাকে সসীম ম্যাট্রিক্স বলে ।

❖ বিনিময়যোগ্য ম্যাট্রিক্স: দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স বিনিময় যোগ্য ম্যাট্রিক্স হবে যদি AB = BA হয় ।

❖ বিপরীত বিনিময়যোগ্য ম্যাট্রিক্স: দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স বিনিময় যোগ্য ম্যাট্রিক্স হবে যদি AB = - BA হয় ।

❖ জটিল ম্যাট্রিক্স : যে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিগুলোর মধ্যে জটিল সংখ্যা থাকে তাকে জটিল ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন : $\begin{bmatrix} 3+i & 7 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$একটি জটিল ম্যাট্রিক্স ।

❖ জটিল ম্যাট্রিক্স : কোন জটিল ম্যাট্রিক্সকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A = \bar{A}$ হয় ।

যেমন : $\begin{bmatrix} 3+i & 7 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$একটি জটিল ম্যাট্রিক্স ।

❖ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স : কোন জটিল ম্যাট্রিক্সকে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $(\bar{A})^T = A$ হয় ।

যেমন : $\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 2 \end{bmatrix}$একটি হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স ।

❖ লম্ব ম্যাট্রিক্স : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে লম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $AA^T = A^TA = I$ হয় ।

❖ সমঘাতি ম্যাট্রিক্স:কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি A^2= A হয় ।

A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ইহা 2× 2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স

$\therefore A^2$=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ তাই A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

❖ শূন্যঘাতি: কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি বলা হবে যদি A^n= 0 হয় ।

A=$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ইহা 2× 2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স

$\therefore A^2$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore A^3$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এখানে A^2= 0 , A^3= 0 তাই A একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স

❖ কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি A^2= I হয় ।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স

❖ কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি A^T= A হয় ।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

❖ কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি A^T= - A হয়।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ একটি অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

❖ কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের যে কোনো সংখ্যক কলাম ও সারির ভূক্তি বাদ দিয়ে গঠিত অপর একটি ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপম্যাট্রিক্স বলে

নির্ণায়ক

❖ **নির্ণায়ক :**যে নিয়মের দ্বারা প্রত্যেকটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের এক একটি সংখ্য বা মান পাওয়া যায় তাকে নির্ণায়ক বলে ।

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 8 \\ -9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ ইহা 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স

এখানে Aএকটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স । ইহার নির্ণায়ককে det(A) বা $|A|$ দ্বারা সূচিত করা হয় ।

অর্থাৎ $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 8 \\ -9 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

- কেবল বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হয়।
- ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই, কিন্তু নির্ণায়কের মান আছে।
- নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা দুটি কলাম একই রকম হলে নির্ণায়কের মান 0 হয়।
- নির্ণায়কের কোন সারি বা কলামকে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে, ঐ সংখ্যা দ্বারা নির্ণায়কটিকেও গুণ করতে হয়।
- নির্ণায়কের পাশাপাশি দুটি সারি বা কলাম পরস্পর বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানকে '–' দ্বারা গুণ করতে হয়।

❖ **অনুরাশি :** নির্ণায়কের কোন ভূক্তি যে সারি বা কলামে আছে, সে সারি এবং কলাম বাদ দিয়ে বাকী ভূক্তিগুলো নিয়ে যে নির্ণায়ক হয়, তাকে ঐ ভূক্তির অনুরাশি বলে।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ a_{11}এর অনুরাশি $m_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ a_{12} এর অনুরাশি $m_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

a_{13}এর অনুরাশি $m_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ a_{21}এর অনুরাশি $m_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

- ❖ **সহগুণক :** যদি অনুরাশিকে ঐ ভূক্তির চিহ্ন দ্বারা গুণ করা হয়, তবে তাকে ঐ ভূক্তির সহগুণক বলে।
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,এখানে M_{ij}হচ্ছে (i,j) তম অনুরাশি ।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ a_{11}এর সহগুণক $c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$
$= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

a_{12}এর সহগুণক $c_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$
$= (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

a_{21}এর সহগুণক $c_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$
$= (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

❖ **অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স ঃ** কোন ম্যাট্রিক্সের সহগুণক ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজকে অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলে।

- A ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্টকে $adj(A)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- $adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$
- এখানে,$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$,এখানে M_{11}হচ্ছে $(1,1)$ তম অনুরাশি । অনুরুপভাবে অন্যগুলো

❖ **বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের পদ্ধতি ঃ** (অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি)

ধরি, A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স। প্রথমে ইহার নির্ণায়ক $|A|$ নির্ণয় করতে হবে।

যদি $|A| \neq 0$ হয়, তবে ইহার বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা যাবে।

এখন A এর অ্যাডজয়েন্ট নির্ণয় করি, তারপর $A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$ সূত্র প্রয়োগ করে A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করি।

❖ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সকে ব্যতিক্রমী বলা হবে যদি তার নির্ণায়কের মান শূন্য হয় ।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ।

❖ অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সকে অব্যতিক্রমী বলা হবে যদি তার নির্ণায়কের মান শূন্য না হয় ।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ।

নোট: ---ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সকে কুটিল এবং অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সকে অকুটিল ম্যাট্রিক্সও বলা হয় ।

--- ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান নেই ।