# অধ্যায়-৮ঃ স্থিতিবিদ্যা

## সমান্তরাল বল

## ভূমিকাঃ দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদেরকে সমান্তরাল বল বলে। দুটি সমান্তরাল বল একই দিকে ক্রিয়ারত হলে, তাদেরকে সদৃশ বা সমমুখী সমান্তরাল বল বলে। আবার, দুটি সমান্তরাল বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত হলে, তাদেরকে অসদৃশ বা বিসদৃশ সমান্তরাল বল বলে। দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি তাদের সমষ্টির সমান। অন্যদিকে দুটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি তাদের অন্তরফলের সমান এবং লব্ধির দিক বৃহত্তম বলের দিকে।

## বিভিন তত্ত্বীয় প্রশ্ন ও উত্তরঃ

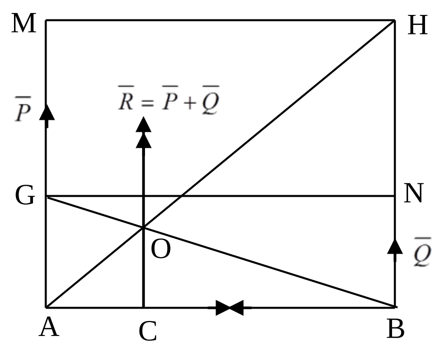
## প্রশ্নঃ দু'টি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি ও এর প্রয়োগবিন্দু নির্ণয় কর।

অথবা, কোন জড় বস্তুর উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি অসমান সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, দিক ও এর প্রয়োগবিন্দু নির্ণয় কর।

উত্তরঃ মনেকরি $P$ ও $Q$ দু'টি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন জড়বস্তুর উপর যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

এদেরকে যথাক্রমে $AM$ ও $BN$ দ্বারা সূচিত করা হল। $ABHM$ এবং $BNGA$ সামান্তরিক দু'টি পূর্ণ করি। $AH$ ও $BG$ কর্ণদ্বয় পরস্পর $O$ বিন্দুতে ছেদ করে। $O$ বিন্দু দিয়ে $P$ ও $Q$ বলের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল করে একটি রেখা অংকন করি, যাহা $AB$ কে $C$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল দু'টির লব্ধি




$$=\overline{AM}+\overline{BN}$$

$$=\left(\overline{AM}+\overline{AB}\right)+\left(\overline{BN}+\overline{BA}\right)$$

$$=\overline{AH}+\overline{BG} \quad \text{(বলের সামান্তরিক সূত্র)}$$

$$=\left(\overline{AO}+\overline{OH}\right)+\left(\overline{BO}+\overline{OG}\right)$$

$$=\left(\overline{BO}+\overline{OH}\right)+\left(\overline{AO}+\overline{OG}\right)$$

$$=\overline{BH}+\overline{AG}$$

এখন, $\overline{BH}$ ও $\overline{AG}$ বলদু'টির মান যথাক্রমে $P$ ও $Q$ এবং এরা $CO$ বরাবর $O$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। বলদু'টি একই দিকে ক্রিয়ারত বলে এদের লব্ধি এদের সমষ্টির সমান।

$\therefore$ লব্ধি $\overline{R}$ হলে, $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$; যাহা $O$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এখন, $\overline{R}$ এর ক্রিয়াবিন্দু $O$ কে $C$ তে স্থানান্তর করি। তাহলে $P$ ও $Q$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $\overline{R}$, $C$ বিন্দুতে $CO$ বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

$C$ বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ঃ $\Delta ABH$ ও $\Delta ACO$ সদৃশ হতে পাই

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{CO}=\frac{AM}{CO}=\frac{P}{CO}$$

$$\therefore P.AC = AB.CO..........(i)$$

আবার, $\Delta BAG$ ও $\Delta BCO$ সদৃশ হতে পাই, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AG}{CO}=\dfrac{BN}{CO}=\dfrac{Q}{CO}$

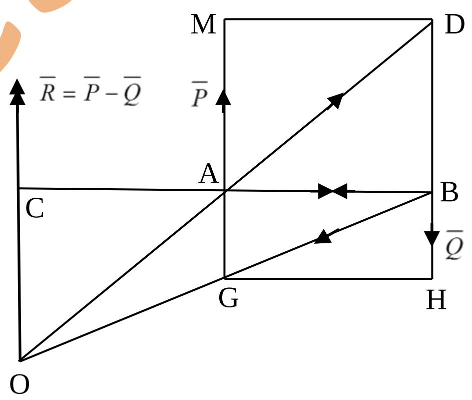
$$\therefore Q.BC = AB.CO..........(ii)$$

$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে পাই, $P.AC = Q.BC \;\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{Q}{P}$

$\therefore$ $C$ বিন্দুটি $AB$ রেখাকে তার প্রান্তীয় বলদু'টির ব্যস্তানুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

## প্রশ্নঃ দু'টি অসদৃশ (বা, বিসদৃশ) অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, দিক এবং এর প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর। অথবা, কোন জড় বস্তুর উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি অসমান বিপরীতমূখী সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, দিক ও এর প্রয়োগবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনেকরি, $P$ ও $Q\,(P>Q)$ মানের দু'টি অসদৃশ সমান্তরাল বল কোন অনড় বস্তুর উপর যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মান ও দিক যথাক্রমে $AM$ ও $BH$ দ্বারা সুচিত। এখন, $ABDM$ ও $BHGA$ সামান্তরিক দু'টি পূর্ণ করি। এদের কর্ণ $AD$ ও $BG$ পরস্পর $O$ বিন্দুতে ছেদ করে। $O$ বিন্দু দিয়ে প্রদত্ত বলের সমান্তরাল করে $OC$ রেখা আঁকি, যা $BA$ কে $C$ বিন্দুতে ছেদ করে।




এখন, $A$ ও $B$ বিন্দুতে কার্যরত বল দু'টির লব্ধি

$$=\overline{AM}+\overline{BH}$$

$$=(\overline{AM}+\overline{AB})+(\overline{BH}+\overline{BA})$$

$$=\overline{AD}+\overline{BG} \quad \text{(বলের সামান্তরিক সুত্র)}$$

$$=\left(\overline{OD}-\overline{OA}\right)+\left(\overline{BO}-\overline{GO}\right)$$

$$=(\overline{BO}+\overline{OD})+(\overline{AO}+\overline{OG})$$

$$=\overline{BD}+\overline{AG} \quad \text{(ভেক্টর-যোজন)}$$

এখন, $\overline{BD}$ ও $\overline{AG}$ বল দু'টির মান যথাক্রমে $P$ ও $Q$ এবং এরা $O$ বিন্দুতে যথাক্রমে $OC$ ও $CO$ বরাবর ক্রিয়াশীল। আবার, বলদু'টি বিপরীতমূখী বলে এদের লব্ধি, এদের অন্তরফলের সমান।

$\therefore$ লব্ধি $\overline{R}$ হলে, $\overline{R}=\overline{P}-\overline{Q}$ ; যাহা $O$ বিন্দুতে $OC$ বরাবর ক্রিয়ারত। এখন, $\overline{R}$ এর ক্রিয়াবিন্দু $O$ কে $C$ তে স্থানান্তর করি। তাহলে $P$ ও $Q$ অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $\overline{R}$, $C$ বিন্দুতে $OC$ বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

$C$ বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ঃ $\Delta ABD$ ও $\Delta ACO$ সদৃশকোণী হতে পাই,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CO}=\frac{AM}{CO}=\frac{P}{CO}$$

$$\therefore P.AC = AB.CO.............(i)$$

একইভাবে, $\Delta BAG$ ও $\Delta BCO$ সদৃশকোণী হতে পাই, $\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{CO}=\frac{BH}{CO}=\frac{Q}{CO}$

$$\therefore Q.BC = AB.CO......(ii)$$

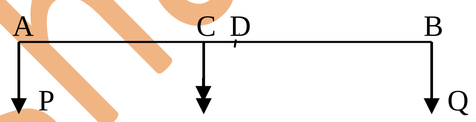
$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে, $P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$

$\therefore$ $C$ বিন্দুটি $AB$ রেখাকে তার প্রান্তীয় বলদ্বু'টির ব্যস্তানুপাতে বহিঃর্বিভক্ত করে।

## বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাবলীর সমাধানঃ

## প্রশ্ন-1ঃ দেখাও যে, $P$ ও $Q$ দুটি সমান্তরাল বলের $Q$ কে $\frac{p^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে $P$ এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির অবস্থান একই থাকে।

সমাধানঃ মনেকরি $P$ ও $Q$ সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং ইহাদের লব্ধি $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত।




$\therefore$ আমরা পাই, $P.AC = Q.BC = Q(AB - AC)$

$$\Rightarrow (P+Q)AC = QAB$$

$$\therefore AC = \frac{Q.AB}{P+Q}............(i)$$

আবার, যখন $A$ ও $B$ বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{P^2}{Q}$ ও $P$ বলদ্বয় ক্রিয়া করে; ধরি, তখন লব্ধি $D$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$$\therefore \frac{P^2}{Q}.AD = P.BD$$

$$P.AD = Q.BD = Q.(AB - AD)$$

$$\Rightarrow (P+Q)AD = Q.AB$$

$$\therefore AD = \frac{Q.AB}{P+Q}..............(ii)$$

$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে পাই, $AC = AD$ । অর্থাৎ $C$ ও $D$ একই বিন্দু।

$\therefore$ লব্ধির অবস্থান একই থাকবে।

## প্রশ্ন-2ঃ কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোতে $P, Q, R$ মানের তিনটি সমমূখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে, দেখাও যে, $P = Q = R$ ।

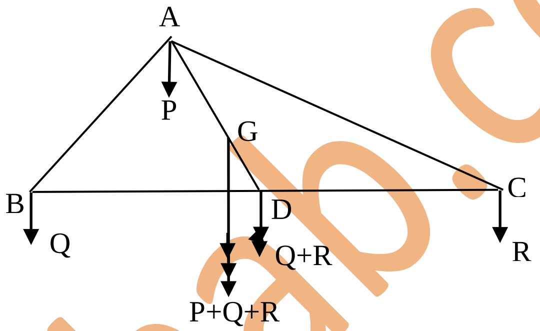
সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এর কৌণিক বিন্দু $A, B, C$ তে যথাক্রমে $P, Q, R$ তিনটি সমমূখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। ধরি $D$, $BC$ এর মধ্যবিন্দু। তাহলে $AD$ ত্রিভুজটির একটি মধ্যমা এবং $G$ ভারকেন্দ্র। যেহেতু, বল

তিনটির লব্ধি $G$ বিন্দুগামী সুতরাং $B$ ও $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত $Q$ ও $R$ বলদ্বয়ের লব্ধি $AD$ ও $BC$ এর ছেদ বিন্দু $D$ তে ক্রিয়ারত হবে।

$$\therefore Q.BD = R.CD$$

$$\Rightarrow Q = R.........(i) \quad [\because BD = CD]$$

আবার, যেহেতু চূড়ান্ত লব্ধি $G$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত, সুতরাং $A$ ও $D$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $G$ তে ক্রিয়ারত হবে।




$$\therefore P.AG = (Q+R).GD$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{Q+R}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{Q+R}{P}$$

$$\Rightarrow 2P = Q+R$$

$$\Rightarrow 2P = 2Q \quad [\because Q = R]$$

$$\therefore P = Q......(ii)$$

$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে পাই, $P = Q = R$

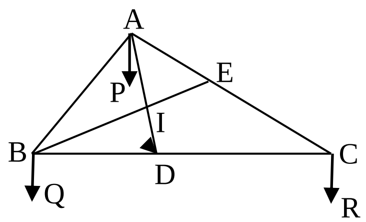
## প্রশ্ন-3ঃ $\Delta ABC$ এর $A, B, C$ কৌণিক বিন্দুতে $P, Q, R$ মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত, তাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, দেখাও যে,

$(i)\ P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

$(ii)\ P : Q : R = a : b : c$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এর $A, B, C$ কৌণিক বিন্দুতে $P, Q, R$ মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। ধরি, $\angle BAC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক $AD$ এবং $I$ অন্তঃকেন্দ্র।

$\because$ লব্ধি $I$ বিন্দুগামী, সুতরাং $B$ ও $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি, $AD$ ও $BC$ এর ছেদবিন্দু $D$ তে ক্রিয়ারত হবে।




$$\therefore Q.BD = R.CD$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad [\because AD\text{, } \angle BAC \text{ কোণের সমদ্বিখন্ডক }]$$

$$\therefore \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} ..............(i)$$

একইভাবে, $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক $BE$ নিয়ে পাই, $\frac{R}{\sin C} = \frac{P}{\sin A}$ .....................$(ii)$

$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে পাই, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

$$\Rightarrow P:Q:R=\sin A:\sin B:\sin C \quad ((i) \text{ প্রমাণিত})$$

২য় অংশঃ এখন, $\dfrac{P}{\sin A}=\dfrac{Q}{\sin B}=\dfrac{R}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{P}{a/2R'}=\frac{Q}{b/2R'}=\frac{R}{c/2R'} \qquad [\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R']$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c} \qquad ((ii) \text{ প্রমাণিত})$$

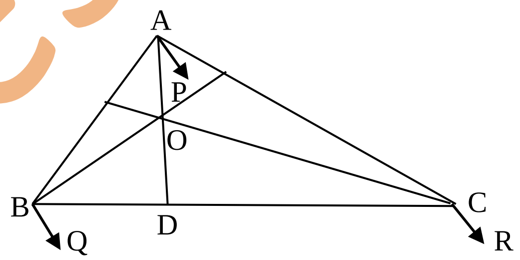
## প্রশ্ন-4ঃ $\Delta ABC$ এর $A,B,C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত সমমূখী সমান্তরাল বল $P,Q,R$ । ইহাদের লব্ধি লম্বকেন্দ্রগামী। প্রমাণ কর যে,

$$(i)\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$$

$$(ii)P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)=R(a^2+b^2-c^2)$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এর $A,B,C$ বিন্দু থেকে $P,Q,R$ সমমূখী সমান্তরাল বলত্রয় ক্রিয়ারত। ধরি, $AD\perp BC$ এবং $O$ লম্বকেন্দ্র। যেহেতু লব্ধি, লম্বকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। সুতরাং $B$ ও $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $AD$ ও $BC$ এর ছেদবিন্দু $D$ তে ক্রিয়ারত হবে।

$$\therefore Q.BD=R.CD$$




$$\Rightarrow \frac{Q}{R}=\frac{CD}{BD}=\frac{CD/AD}{BD/AD}=\frac{\cot C}{\cot B}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R}=\frac{\tan B}{\tan C}$$

$$\therefore \frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$$

একইভাবে $P$ ও $Q$ বলদ্বয়ের লব্ধি বিবেচনা করে পাই, $\dfrac{P}{\tan A}=\dfrac{Q}{\tan B}$

$$\therefore \frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C} \qquad (\text{প্রমাণিত})$$

২য় অংশঃ এখন, $\dfrac{P}{\tan A}=\dfrac{Q}{\tan B}=\dfrac{R}{\tan C}$ হতে পাই,

$$\frac{P.\cos A}{\sin A}=\frac{Q.\cos B}{\sin B}=\frac{R.\cos C}{\sin C}$$

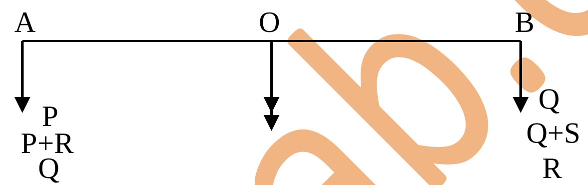
$$\Rightarrow \frac{P\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a/2R'}=\frac{Q\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{b/2R'}=\frac{R\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c/2R'}$$

$$\Rightarrow \frac{P(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \frac{Q(c^2+a^2-b^2)}{2abc} = \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$\therefore P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2) \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

## প্রশ্ন-5ঃ $P, Q$ মানের দু'টি সমমূখী সমান্তরাল বলের লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। $P$ কে $R$ পরিমানে এবং $Q$ কে $S$ পরিমানে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার $P, Q$ এর বদলে $Q, R$ ক্রিয়া করলে ও লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, $P$ ও $Q$ বলদ্বয় যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেওয়া আছে, ইহাদের লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।




$\therefore P.AO = Q.BO \quad \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{Q}{P}$ ...........$(i)$

২য় ক্ষেত্রে, যখন $P$ কে $R$ পরিমানে এবং $Q$ কে $S$ পরিমানে বৃদ্ধি করা হয়। তখনও লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore (P+R).AO = (Q+S).BO$

$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{Q+S}{P+R}$ .........$(ii)$

৩য় ক্ষেত্রে, যখন $P$ ও $Q$ এর বদলে $Q$ ও $R$ ক্রিয়া করে, তখনও লব্ধি $O$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore Q.\ AO = R.BO$

$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{R}{Q}$..................$(iii)$

$(i)$ নং ও $(ii)$ নং হতে পাই,

$$\frac{AO}{BO} = \frac{Q}{P} = \frac{Q+S}{P+R} = \frac{Q+S-Q}{P+R-P} = \frac{S}{R}$$

$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{S}{R}$..................$(iv)$

এখন $(i)$, $(iii)$ ও $(iv)$ হতে পাই, $\frac{Q}{P} = \frac{R}{Q} = \frac{S}{R}$

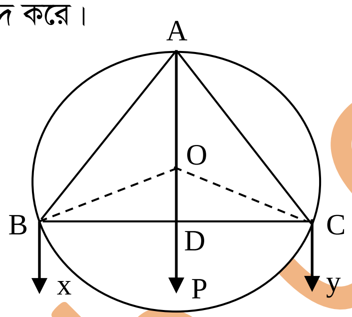
$$\Rightarrow \frac{Q-R}{P-Q} = \frac{R-S}{Q-R}$$

$$\Rightarrow R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$$

$$\therefore\ S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

## ## প্রশ্ন-6ঃ $O$, $\Delta ABC$ এর পরিকেন্দ্র এবং $AO$ বরাবর $P$ মানের বলটি ক্রিয়া করছে। দেখাও যে, $B$ ও $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P$ বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, $B$ ও $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P$ বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয় $x$ ও $y$ । $AO$ বরাবর ক্রিয়ারত, $P$ বলের ক্রিয়ারেখাকে বর্ধিত করি, যেন তা $BC$ কে $D$ বিন্দুতে ছেদ করে।




$\therefore x.BD = y.CD$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\sin COD}{\sin BOD}$ $\quad [\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}]$

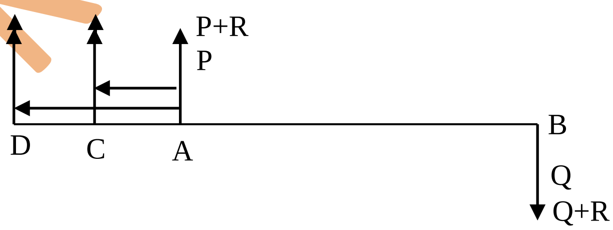
$\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin(\pi - AOC)}{\sin(\pi - AOB)} = \dfrac{\sin AOC}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin 2B}{\sin 2C}$

$\therefore x : y = \sin 2B : \sin 2C$

## ## প্রশ্ন-7ঃ দু'টি বিপরীতমূখী সমান্তরাল বল $P$ ও $Q\,(P > Q)$ এর প্রত্যেকের মান যদি সমপরিমানে বর্ধিত করা হয়,তবে প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু $P$ হতে আরও দূরে সরে যাবে।

সমাধানঃ মনেকরি, $P$ ও $Q$ দু'টি অসদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে $AB$ রেখার $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি $AB$ রেখার বর্ধিতাংশে $C$ বিন্দুতে কার্যরত।




$\therefore P.AC = Q.BC \;= Q(AC + AB)$

$\Rightarrow (P - Q)AC = Q.AB$

$\therefore AC = \dfrac{Q.AB}{P - Q}$..............$(i)$

এখন, প্রতিটি বলের মান $R$ পরিমানে বৃদ্ধি করা হলে; ধরি, লব্ধি $D$ বিন্দুতে কার্যরত হবে।

$\therefore (P + R).AD = (Q + R).BD = (Q + R)(AB + AD)$

$\Rightarrow (P + R - Q - R)AD = (Q + R).AB$

$\Rightarrow (P - Q)AD = (Q + R)AB$

$\therefore AD = \dfrac{Q + R}{P - Q}.AB$............$(ii)$

$(ii) - (i) \Rightarrow AD - AC = \dfrac{(Q + R - Q).AB}{P - Q} = \dfrac{R.AB}{P - Q} > 0 \quad [\because P > Q]$

$\Rightarrow AD > AC$

অর্থাৎ, লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু $P$ হতে আরও দূরে সরে যাবে।

## প্রশ্ন-8ঃ সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ বিপরীতমুখী $(P > Q)$ এবং $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। $P$ ও $Q$ প্রত্যেককে $x$ পরিমানে বৃদ্ধি করা হলে, লব্ধি $d = \dfrac{x.AB}{P-Q}$ দূরে সরে যাবে।

অথবা, সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ বিপরীতমূখী $(P > Q)$ এবং $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। $P$ ও $Q$ প্রত্যেককে $R$ পরিমানে বৃদ্ধি করা হলে, লব্ধি $d = \dfrac{R}{P-Q}AB$ দূরে সরে যাবে।

সমাধান ঃ (নিজে কর)

এখানে, $AC = \dfrac{Q.AB}{P-Q}$; $AD = \dfrac{Q+x}{P-Q}.AB$

$\therefore$ লব্ধির সরণ, $d = AD - AC = \dfrac{(Q+x-Q)AB}{P-Q} = \dfrac{x.AB}{P-Q}$

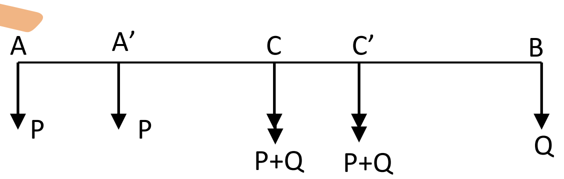
## প্রশ্ন-9ঃ $P, Q$ সমমূখী সমান্তরাল বল। $P$ এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে $x$ দূরে সরালে, দেখাও যে লব্ধি $\dfrac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে।

সমাধানঃ মনেকরি, $P$ ও $Q$ সমান্তরাল বলদ্বয় $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাদের লব্ধি $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$$\therefore P.AC = Q.BC$$

আবার, $P$ এর ক্রিয়ারেখা $x$ দূরে $A'$ বিন্দুতে সরালে ধরি লব্ধি $C'$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$$\therefore P.A'C' = Q.BC'$$




$$\Rightarrow P(A'C + CC') = Q.(BC - CC')$$

$$\Rightarrow P(AC - x) + P.CC' + Q.CC' = Q.BC$$

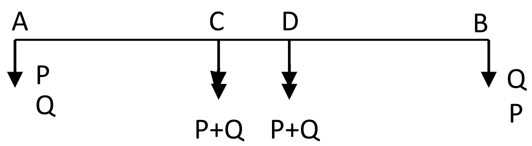
$$\Rightarrow P.AC + (P+Q)CC' = P.x + Q.BC \qquad [\because P.AC = Q.BC]$$

$\therefore CC' = \dfrac{Px}{P+Q}$; যাহা লব্ধির সরণ। অর্থাৎ লব্ধি $\dfrac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে।

## প্রশ্ন-10ঃ কোন অনঢ় বস্তুর $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি সমমূখী সমান্তরাল বল যথাক্রমে $P$ ও $Q$ $(P > Q)$ এর পরস্পরের অবস্থান বিনিময় করলে, দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $AB$ বরাবর $d$ দূরত্বে সরে যাবে, যখন $d = \dfrac{P-Q}{P+Q}.AB$।

সমাধানঃ $P$ ও $Q$ সমান্তরাল বলদ্বয় যখন $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তখন ধরি, তাদের লব্ধি $C$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। সুতরাং $P.AC = Q.BC$

$$\Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{BC+AC} = \frac{P+Q}{AB}$$




$$\Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q}.AB$$

আবার, যখন বলদ্বয় স্থান বিনিময় করে, তখন ধরি তাদের লব্ধি $D$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

সুতরাং $Q.AD = P.BD$ ।

$$\Rightarrow \frac{P}{AD} = \frac{Q}{BD} = \frac{P+Q}{AD+BD} = \frac{P+Q}{AB}$$

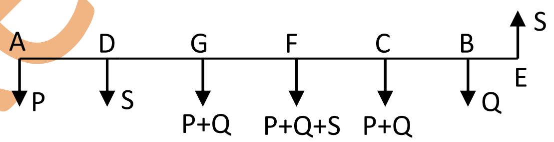
$$\Rightarrow AD = \frac{P}{P+Q}.AB$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $d = CD = AD - AC = \frac{P}{P+Q}.AB - \frac{Q}{P+Q}.AB = \frac{P-Q}{P+Q}.AB$

## প্রশ্ন-11ঃ কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত দুটি সমমূখী সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ এর সাথে একই সমতলে $b$ দূরত্বে দুটি সমান $S$ মানের বিপরীতমূখী সমান্তরাল বলকে সংযুক্ত করলে, দেখাও যে, মিলিত বলগুলোর লব্ধি $\frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

সমাধানঃ মনেকরি, $P$ ও $Q$ বলদুটি যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি $P+Q$, $G$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। ধরি, $D$ ও $E$ বিন্দুতে $S$ মানের দুটি সমান ও বিপরীতমূখী বল প্রয়োগ করা হলো, এর ফলে লব্ধির নতুন অবস্থান হলো $C$ ।

এখানে $DE = b$ । পুনরায় ধরি, $D$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল $S$ এবং $C$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল $P+Q$ এর লব্ধি $(P+Q+S)$, $F$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।




সুতরাং আমরা পাই, $(P+Q).CF = S.DF$ ......... $(i)$

আবার, $F$ ও $E$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $P+Q$, $G$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত হওয়ায় আমরা পাই,

$$(P+Q+S).GF = S.GE$$

$$\Rightarrow (P+Q).GF = S(GE-GF) = S.EF \quad .............. \quad (ii)$$

$$(i)+(ii) \Rightarrow (P+Q).(CF+GF) = S(DF+EF)$$

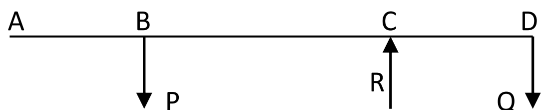
$$\Rightarrow (P+Q).CG = S.DE = S.b$$

$$\Rightarrow CG = \frac{bS}{P+Q}$$

অর্থাৎ লব্ধির সরণ $= \frac{bS}{P+Q}$ ।

## প্রশ্ন-12ঃ একটি হালকা দন্ডের এক প্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দন্ডটি ভারসাম্য অবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P:Q:R = 1:2:3$

সমাধানঃ মনেকরি, $AD$ দন্ডের $A$ প্রান্ত হতে $2, 8$ ও $6$ মিটার দূরত্বে অবস্থিত $B, D$ ও $C$ বিন্দুতে $P, Q, R$ বল তিনটি ক্রিয়ারত। সুতরাং $AB = 2$ মিটার; $AC = 6$ মিটার; $AD = 8$ মিটার। তাহলে $BC = 6-2 = 4$ মিটার



এবং $CD = 8 - 6 = 2$ মিটার। যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং $R$ বলটি হবে $P$ ও $Q$ এর লব্ধি এবং ইহার দিক $P$ ও $Q$ এর দিকের বিপরীতমুখী হবে।

$$\therefore P.BC = Q.CD$$

$$\Rightarrow P.4 = Q.2$$

$$\Rightarrow 2P = Q .................(i)$$

আবার, যেহেতু $R = P + Q = P + 2P = 3P$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $P : Q : R = P : 2P : 3P$

$$\Rightarrow P : Q : R = 1 : 2 : 3$$ (দেখানো হলো)

....................................