অধ্যায়-৮ঃ স্থিতিবিদ্যা

সমবিন্দুবল

ভূমিকাঃ যা কোন বস্তুর উপর (স্থিতিশীল বা গতিশীল) ক্রিয়া করে তার অবস্থার পরিবর্তন করে বা করতে চায়, তাকে বল বলে। বল বিভিন্ন প্রকার হতে পারে, যেমনঃ চাপ, টান, ঘর্ষণ, আকর্ষণ, বিকর্ষণ, ওজন ইত্যাদি। বস্তুর উপর কোন বিন্দুতে একই সময়ে একাধিক বল ক্রিয়া করলে, তাদেরকে সমবিন্দু বল বলে। কোন কণার উপর একই সময়ে একাধিক বল ক্রিয়া করলে তাদের মিলিত ক্রিয়াফল যদি ঐ কণার উপর কোন নির্দিষ্ট দিকে একটি মাত্র বলের ক্রিয়াফলের সমান হয়, তবে ঐ বলকে তাদের লব্ধি বলে এবং ঐ একাধিক বলের প্রত্যেকটিকে তাদের লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলে। কোন বলের উপাংশ গুলি পরস্পর লম্ব হলে তাদেরকে লম্বাংশ বলে। বলের লম্বাংশ কেবল দু'টি হতে পারে, একটি অনুভূমিক লম্বাংশ এবং অপরটি উলম্ব লম্বাংশ।

নোটঃ (১) একই দিকে কার্যরত দুটি বলের লব্ধি, বল দুটির সমষ্টির সমান।

(২) একই রেখায় বিপরীত দিকে কার্যরত দুটি বলের লব্ধি, বল দুটির অন্তরফলের সমান এবং লব্ধির দিক বৃহত্তম বলের দিকে হবে।

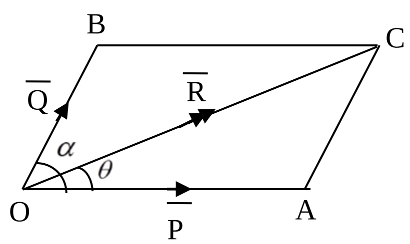
(৩) সমবিন্দু এবং ভিন্ন রেখায় কার্যরত দুটি বলের লব্ধি, বলের সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।

তত্ত্বীয় প্রশ্ন ও উত্তরঃ

প্রশ্নঃ বলের সামান্তরিক সূত্রটি বর্ণনা কর। পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত দুটি বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ কোন সামান্তরিকের দু'টি সন্নিহিত বাহু দ্বারা যদি কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি বলের মান ও দিক সূচিত করা যায়, তবে ঐ সামান্তরিকের উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা বলদ্বয়ের লব্ধি মানে ও দিকে সূচিত হবে।

লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ঃ মনেকরি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ বল দুটি মানে ও দিকে যথাক্রমে $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ দ্বারা সূচিত। $OACB$ সামান্তরিক পূর্ণ করি। তাহলে, বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে কর্ণ OC দ্বারা বল দুটির লব্ধি $\overline{R}$ মানে ও দিকে সূচিত হবে। ধরি, লব্ধি $\overline{R}$, $\overline{P}$ বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore$ আমরা পাই, $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} \Rightarrow \overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$.............$(i)$

এখন, $\overline{R}.\overline{R} = (\overline{P}+\overline{Q}).(\overline{P}+\overline{Q})$

$\Rightarrow R^2 = \overline{P}.\overline{P} + 2\overline{P}.\overline{Q} + \overline{Q}.\overline{Q}$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$, যাহা লব্ধির মান নির্দেশ করে।

(i) নং কে $\overline{P}$ দ্বারা ডট গুণন করে পাই $\overline{P}.\overline{R} = \overline{P}.\ (\overline{P}+\overline{Q})$

$$\Rightarrow \overline{P}.\overline{R} = \overline{P}.\overline{P} + \overline{P}.\overline{Q}$$

$$\Rightarrow PR\cos\theta = P^2 + PQ\cos\alpha$$

$$\Rightarrow R\cos\theta = P + Q\cos\alpha \text{...........}(ii)$$

পুনরায় (i) নং কে $\overline{P}$ দ্বারা ক্রসগুণন করে পাই, $\overline{P}\times\overline{R} = \overline{P}\times(\overline{P}+\overline{Q})$

$$\Rightarrow \overline{P}\times\overline{R} = \overline{P}\times\overline{P} + \overline{P}\times\overline{Q} = \overline{P}\times\overline{Q}$$

$$\therefore \left|\overline{P}\times\overline{R}\right| = \left|\overline{P}\times\overline{Q}\right|$$

$$\Rightarrow PR\sin\theta = PQ\sin\alpha$$

$$\Rightarrow R\sin\theta = Q\sin\alpha ....(iii)$$

$$(iii) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

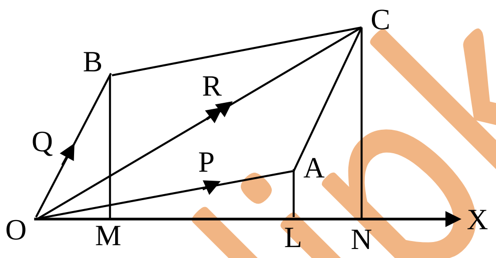
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\right),$$ যাহা লব্ধির দিক নির্দেশ করে।

প্রশ্নঃ প্রমাণ কর যে, কোন নির্দিষ্ট দিকে দু'টি বলের লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল, ঐ একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

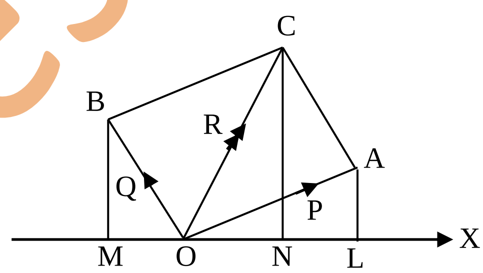
অথবা, লম্বাংশের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত, কোন নির্দিষ্ট দিকে দু'টি বলের লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল; ঐ একই দিকে উহাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

প্রমাণঃ



চিত্র-১



চিত্র-২

মনেকরি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত দু'টি বল $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ যথাক্রমে $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত। তাহলে, $OACB$ সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা বলদ্বয়ের লব্ধি মানে ও দিকে সূচিত হবে। ধরি, OX একটি নির্দিষ্ট দিক। এখন OX এর উপর AL, BM, CN লম্বটানি। তাহলে, OX বরাবর $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$ বলের লম্বাংশ যথাক্রমে $OL,\ OM, ON$ ।

(১) নং চিত্রে $OL,\ OM, ON$ যোগবোধক এবং (২) নং চিত্রে OM বিয়োগবোধক।

এখন, OX বরাবর $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ বলদ্বয়ের লম্বাংশের বীজগণিতীয়

যোগফল $= OL \pm OM$ [(২) নং চিত্রের জন্য বিয়োগ চিহ্ন]

$= OL \pm LN$ [$\because OB \parallel AC$ এবং $OB = AC$ $\therefore$ তাদের অভিক্ষেপও সমান]

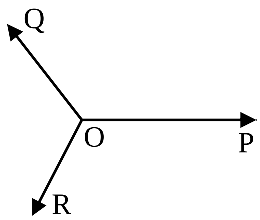
$= ON = OX$ বরাবর R বলের লম্বাংশ।

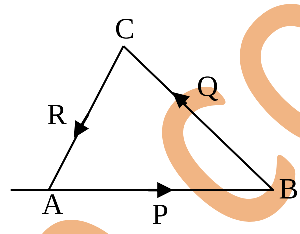
অর্থাৎ, OX বরাবর $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ বলদ্বয়ের লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল, তাদের লব্ধি $\overline{R}$ এর লম্বাংশের সমান।

প্রশ্নঃ বলের ত্রিভূজ সূত্রটি বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

বর্ণনা ঃ এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক যদি একইক্রমে কোন ত্রিভূজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণঃ মনেকরি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ বলত্রয়কে মানে ও দিকে ΔABC এর যথাক্রমে AB, BC ও CA বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়। প্রমাণ করতে হবে যে, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। অর্থাৎ, $\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}=0$





ভেক্টর যোজন হতে পাই, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AC}+\overline{CA}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

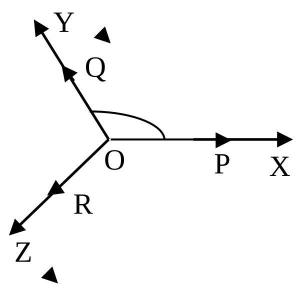
$$\therefore \overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}=0$$

অর্থাৎ বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। (প্রমাণিত)

প্রশ্নঃ লামীর উপপাদ্যটি বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

বর্ণনাঃ এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটির মান অপর দু'টির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

প্রমাণঃ মনেকরি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{P}{\sin Q\wedge R}=\dfrac{Q}{\sin R\wedge P}=\dfrac{R}{\sin P\wedge Q}$



যেখানে $Q\wedge R$ দ্বারা $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্দেশ করে।

যেহেতু, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং $\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}=0$.............$(i)$

এখন (i) নং এর উভয় পক্ষকে $\overline{R}$ দ্বারা ক্রস গুণন করে পাই,

$$\overline{R}\times\overline{P}+\overline{R}\times\overline{Q}+\overline{R}\times\overline{R}=0$$

$$\Rightarrow \overline{R}\times\overline{P}=\overline{Q}\times\overline{R}$$

$$\Rightarrow \left|\overline{R}\times\overline{P}\right|=\left|\overline{Q}\times\overline{R}\right|$$

$$\Rightarrow RP\sin R\wedge P=QR\sin Q\wedge R$$

$$\Rightarrow P\sin R\wedge P=Q\sin Q\wedge R$$

$$\therefore \frac{P}{\sin Q\wedge R}=\frac{Q}{\sin R\wedge P}\text{...........}(ii)$$

অনুরূপভাবে, (i) নং কে $\overline{P}$ দ্বারা ক্রস গুণন করে দেখানো যায় যে, $\dfrac{Q}{\sin R\wedge P}=\dfrac{R}{\sin P\wedge Q}$.............$(iii)$

(ii) নং ও (iii) নং হতে পাই, $\dfrac{P}{\sin Q\wedge R}=\dfrac{Q}{\sin R\wedge P}=\dfrac{R}{\sin P\wedge Q}$ (প্রমাণিত)

বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাবলীর সমাধানঃ

প্রশ্ন-1ঃ সমমানের দুটি বল কোন বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি উৎপন্ন হয়, তা তারা 2β কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি হয়, তার দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$ ।

সমাধান ঃ মনেকরি, সমমানের বলদ্বয় P, P ।

2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের লব্ধি $R_1 = \sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos 2\alpha}$

$$= \sqrt{2P^2(1+\cos 2\alpha)} = \sqrt{2P^2.2\cos^2\alpha} = 2P\cos\alpha$$

2β কোণে ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের লব্ধি $R_2 = \sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos 2\beta} = 2P\cos\beta$

শর্তমতে, $R_1 = 2R_2$

$\Rightarrow 2P\cos\alpha = 2.2P\cos\beta$

$\therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-2ঃ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত $3P$ এবং $2P$ মানের দুটি বলের লব্ধি R ; প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মান ও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনেকরি, $3P$ ও $2P$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α

$\therefore R^2 = (3p)^2 + (2P)^2 + 2.3P.2P.\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha = P^2(13+12\cos\alpha)..........(i)$

আবার, প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ হলে লব্ধি হয় $2R$

$\therefore (2R)^2 = (6P)^2 + (2p)^2 + 2.6P.2P.\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = 40p^2 + 24p^2\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = P^2(10+6\cos\alpha)..........(ii)$

$(i)\div(ii) \Rightarrow 1 = \dfrac{13+12\cos\alpha}{10+6\cos\alpha}$

$\Rightarrow 13+12\cos\alpha = 10+6\cos\alpha$

$\Rightarrow 6\cos\alpha = -3$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{2} = \cos 120^0 \qquad \therefore\ \alpha = 120^0$

প্রশ্ন-3ঃ কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুটি বলের লব্ধি তাদের একটির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে ও অপরটির এক তৃতীয়াংশ হয়। দেখাও যে, বলদ্বয়ের মানের অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$।

অথবা, দেখাও যে, বলদ্বয়ের মানের অনুপাত $2\sqrt{2} : 3$।

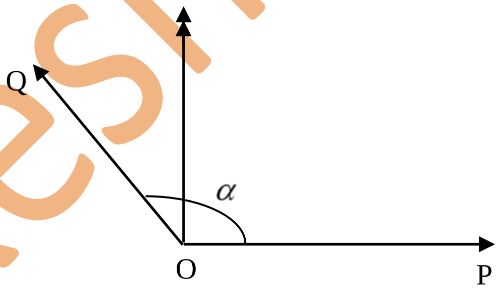
সমাধানঃ মনেকরি, বলদ্বয় P ও Q, তাদের অন্তর্গত কোণ α এবং লব্ধি P এর সাথে লম্ব।

তাহলে, $\tan 90^\circ = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow P+Q\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Q\cos\alpha = -P$

যেহেতু, লব্ধি অপর বল Q এর এক তৃতীয়াংশ, সুতরাং



$$\left(\frac{Q}{3}\right)^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$

$$= P^2+Q^2+2P(-P) = Q^2-P^2$$

$\Rightarrow Q^2 = 9Q^2-9P^2$

$\Rightarrow 8Q^2 = 9P^2$

$\Rightarrow \dfrac{Q^2}{P^2} = \dfrac{9}{8} \Rightarrow \dfrac{Q}{P} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow Q : P = 3 : 2\sqrt{2}$

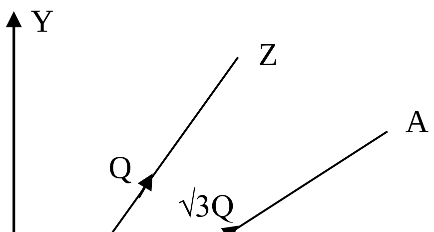
অর্থাৎ বলদ্বয়ের মানের অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

[অথবা-এর জন্য $P : Q = 2\sqrt{2} : 3$]

প্রশ্ন-4ঃ কোন বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P=Q$ অথবা, $P=2Q$।

সমাধানঃ মনেকরি, P ও Q বল দু'টি যথাক্রমে OX ও OZ বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি $\sqrt{3}Q$, OA বরাবর ক্রিয়া করে। ধরি, OY রেখাটি OX এর উপর লম্ব এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α।

এখন, OX বরাবর (বলদ্বয় ও এদের লব্ধির) লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$\sqrt{3}Q\cos 30^\circ = P\cos 0 + Q\cos\alpha$

$\Rightarrow \sqrt{3}Q.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = P + Q\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{3Q}{2} = P + Q\cos\alpha ....(i)$

আবার, OY বরাবর (বলদ্বয় ও এদের লব্ধির) লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$\sqrt{3}Q\sin 30^\circ = P\sin 0 + Q\sin\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}Q}{2} = Q\sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ [360° এর মধ্যে এ দুটি কোণ ছাড়া আর নাই]

$\therefore \alpha = 60^\circ, 120^\circ$

এখন, $\alpha = 60^\circ$ হলে, $(i) \Rightarrow \dfrac{3Q}{2} = P + Q.\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{3Q}{2} - \dfrac{Q}{2} = P$

$\Rightarrow Q = P \;\therefore P = Q$

আবার, $\alpha = 120^\circ$ হলে $(i) \Rightarrow \dfrac{3Q}{2} = P - \dfrac{Q}{2}$

$\Rightarrow 2Q = P \;\therefore P = 2Q$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-5ঃ θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ উক্ত কোণটি $90^\circ - \theta$ হলে লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ । প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \dfrac{m-1}{m+1}$

সমাধানঃ যখন P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ θ, তখন $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$

$\Rightarrow (2m+1)^2.(P^2+Q^2) = (P^2+Q^2) + 2PQ\cos\theta$

$\therefore 2PQ\cos\theta = (P^2+Q^2)\{(2m+1)^2 - 1\} ....(i)$

আবার, যখন P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $(90^\circ - \theta)$,

তখন, $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos(90^\circ-\theta)}$

$\Rightarrow (2m-1)^2.(P^2+Q^2) = (P^2+Q^2) + 2PQ\sin\theta$

$$\Rightarrow 2PQ\sin\theta = \left(P^2+Q^2\right)\left\{(2m-1)^2-1\right\}...............(ii)$$

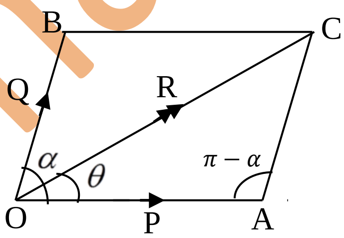
$$(ii)\div(i)\Rightarrow\ \tan\theta = \frac{(2m-1)^2-1}{(2m+1)^2-1} = \frac{2m\,(2m-2)}{2m(2m+2)} = \frac{2m-2}{2m+2} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{m-1}{m+1} \qquad \text{[প্রমাণিত]}$$

প্রশ্ন-6ঃ α কোণে হেলানো OA এবং OB বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, OA এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। Q পরিবর্তিত হয়ে Q' হলে তাদের লব্ধি R', OA এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে। $\alpha \neq \pi$ হলে, দেখাও যে $\frac{R'}{R} = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha-\theta')}$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, $OACB$ সামান্তরিকের OA এবং OB বাহু বরাবর যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়ারত, তাদের অন্তর্গত কোণ α । তাহলে কর্ণ OC দ্বারা তাদের লব্ধি R মানে ও দিকে সূচিত হবে। এখানে $\angle COA = \theta$ ।

এখন ΔOAC হতে পাই, $\frac{R}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{P}{\sin(\alpha-\theta)}$ ....(i)



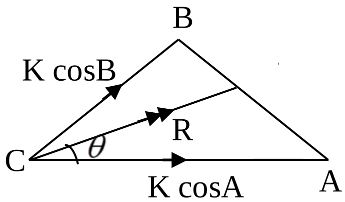
আবার, Q পরিবর্তিত হয়ে Q' হলে, R পরিবর্তিত হয়ে R' এবং θ পরিবর্তিত হয়ে θ' হয়।

$$\therefore \frac{R'}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{P}{\sin(\alpha-\theta')} \quad .... (ii)$$

$$(ii)\div(i)\Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha-\theta')} \qquad \text{(প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন-7ঃ ΔABC এর CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দু'টি বলের মান $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির মান $\sin C$ এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণকে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ এবং $\frac{1}{2}(C+A-B)$ অংশে বিভক্ত করে।

সমাধানঃ মনেকরি, ΔABC এর CA ও CB বাহু বরাবর যথাক্রমে $K\cos A$ ও $K\cos B$ বলদ্বয় ক্রিয়ারত। তাদের অন্তর্গত কোণ C । ধরি, লব্ধি R, CA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore R^2 = (k\cos A)^2 + (k\cos B)^2 + 2.\,k\cos A.\,k\cos B.\cos C$$

$$= K^2[\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B.\cos C]$$

$$= K^2[\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C - \cos^2 C]$$

$$= K^2[1-\cos^2 C] \quad [\because A+B+C=\pi \text{ হলে } \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C = 1]$$

$$= K^2\sin^2 C$$

$\therefore R = K\sin C$

অর্থাৎ, লব্ধি $\sin C$ এর সমানুপাতিক। (প্রমাণিত)

২য় অংশঃ $\tan\theta = \dfrac{K\cos B.\sin C}{K\cos A + K\cos B.\cos C}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\cos B\sin C}{\cos A + \cos B\cos C}$$

$$= \frac{\cos B\sin C}{\cos\{\pi - (B+C)\} + \cos B\cos C} \qquad [\because A+B+C=\pi]$$

$$= \frac{\cos B\sin C}{-\cos(B+C) + \cos B\cos C}$$

$$= \frac{\cos B\sin C}{-\cos B\cos C + \sin B\sin C + \cos B\cos C} = \frac{\cos B\sin C}{\sin B\sin C} = \cot B$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

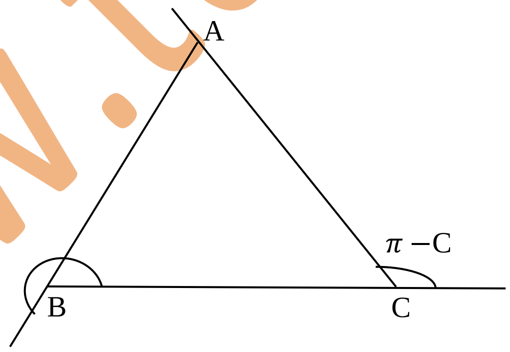
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} - B = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - B\right) = \frac{1}{2}(A+C-B) = \frac{1}{2}(C+A-B)$$

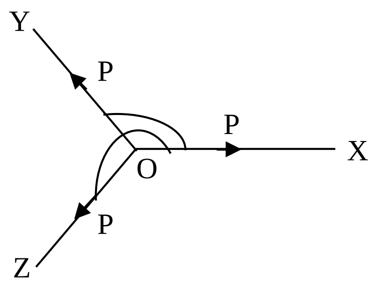
$\therefore \angle C$ এর অপর অংশ $= C - \theta = C - \dfrac{1}{2}(C+A-B) = \dfrac{1}{2}(C+B-A) = \dfrac{1}{2}(B+C-A)$

অর্থাৎ, লব্ধির দিক $\angle C$ কোণকে $\dfrac{1}{2}(C+A-B)$ এবং $\dfrac{1}{2}(B+C-A)$ অংশে বিভক্ত করে। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৪ঃ ABC ত্রিভূজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল দিকে P মানের তিনটি সমান বল কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। প্রমাণ কর যে তাদের লব্ধি $P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

সমাধানঃ





মনেকরি, BC, CA, AB বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর P মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি R, OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখন, OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = P\cos 0 + P\cos(\pi - C) + P\cos(\pi + B) = P(1 - \cos C - \cos B) \quad ....(i)$$

আবার, OX এর লম্বদিকে বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\sin\theta = P\sin 0 + P\sin(\pi - C) + P\sin(\pi + B) = P(\sin C - \sin B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(ii)$$

$$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = P^2\left\{(1 - \cos C - \cos B)^2 + (\sin C - \sin B)^2\right\}$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2(1 + \cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos C + 2\cos B\cos C - 2\cos B + \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin B\sin C)$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2(3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B\cos C - 2\sin B\sin C)$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2\{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(B + C)\}$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2\{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(\pi - A)\} \qquad [\because A + B + C = \pi]$$

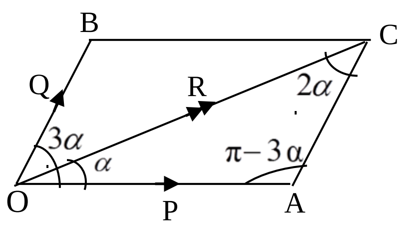
$$\Rightarrow R^2 = P^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$$

$\therefore\ R = P\sqrt{(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-9ঃ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দু'টি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\left(\dfrac{P}{2Q}\right)$ এবং লব্ধির মান $\dfrac{P^2 - Q^2}{Q}$ $(P > Q)$।

অথবা, কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দু'টি বলের অন্তর্গত কোণ 3α এবং তাদের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়া রেখার সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{P}{2Q}\right)$ এবং $R = \dfrac{P^2 - Q^2}{Q}$ $(P > Q)$।

সমাধানঃ মনেকরি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয় $OACB$ সামান্তরিকের যথাক্রমে OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, বলদ্বয়ের লব্ধি R ঐ সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত হবে। (মনেকরি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 3α। সুতরাং লব্ধি, P বলের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।)



এখন, ΔOAC হতে পাই, $\dfrac{P}{\sin 2\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin(\pi - 3\alpha)}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2Q} = \cos\alpha$$

$$\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}\left(\dfrac{P}{2Q}\right)$

এখন লব্ধির মান, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 3\alpha$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\left(4.\frac{P^3}{8Q^3} - \frac{3P}{2Q}\right)$$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ.\frac{P^3 - 3PQ^2}{2Q^3}$$

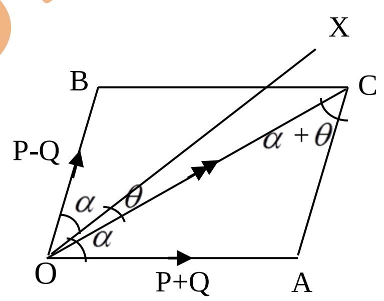
$$i.e.\ R^2 = \frac{P^2Q^2 + Q^4 + P^4 - 3P^2Q^2}{Q^2} = \frac{P^4 - 2P^2Q^2 + Q^4}{Q^2} = \frac{\left(P^2 - Q^2\right)^2}{Q^2}$$

$$\therefore\ R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$$

প্রশ্ন-10ঃ $P+Q$ এবং $P-Q$ বলদ্বয় 2α কোণে ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$

সমাধানঃ মনেকরি, $P+Q$ এবং $P-Q$ বলদ্বয় যথাক্রমে $OACB$ সামান্তরিকের OA ও OB দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত, এদের লব্ধি কর্ণ OC দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত। সুতরাং $\angle AOB = 2\alpha$ ।

ধরি, OX রেখা $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডক।



$\therefore \angle COX = \theta,\ \angle AOC = \alpha - \theta,\ \angle BOC = \angle ACO = \alpha + \theta$

এখন, ΔAOC হতে পাই,

$$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)} \quad [\because AC = OB]$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন}]$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta} \quad \Rightarrow \frac{P}{Q} = \tan\alpha.\cot\theta$$

$$\therefore\ P\tan\theta = Q.\tan\alpha$$

প্রশ্ন-11ঃ এক বিন্দুতে কার্যরত $P,\ Q$ মানের দুটি বলের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশের পরিমাণ Q হলে, প্রমাণ কর যে, বল দুটির অন্তর্গত কোণ $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$ ।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $=\alpha$ এবং ধরি, লব্ধি $R,\ P$ এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0+Q\cos\alpha = R\cos\theta$

$$\Rightarrow P+Q\cos\alpha = Q .... (i) \qquad [\because R\cos\theta = Q]$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$$

আবার $(i) \Rightarrow P = Q(1-\cos\alpha) = Q.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$$

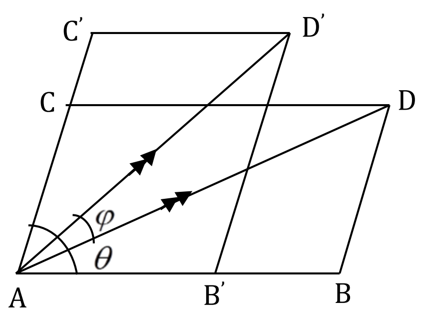
$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right) = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \quad (Shown)$$

এখন, $R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = P^2+Q^2+2P(Q-P)$ $\qquad$ $[(i)$ নং হতে$]$

$$\Rightarrow R = \sqrt{Q^2-P^2+2PQ} \qquad (Shown)$$

প্রশ্ন-12ঃ P, Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ; বল দুটি অবস্থান পরিবর্তন করলে তাদের লব্ধি φ কোণে সরে যায়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, $ABDC$ সামান্তরিকের AB ও AC বাহু দ্বারা যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় এবং কর্ণ AD দ্বারা তাদের লব্ধি মানে ও দিকে সূচিত হয়। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে ধরি, AC' ও AB' দ্বারা যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় এবং $AB'D'C'$ সামান্তরিকের কর্ণ AD' দ্বারা তাদের লব্ধি মানে ও দিকে সূচিত হয়।



তাহলে, $\angle DAD' = \varphi$ এবং $\angle BAD = \angle C'AD' = \frac{1}{2}(\theta-\varphi)$

$$\therefore \angle BAD' = \angle C'AD = \frac{1}{2}(\theta-\varphi)+\varphi = \frac{1}{2}(\theta+\varphi) = \angle BDA$$

এখন, ΔBAD হতে পাই, $\frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)} = \frac{Q}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)-\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)+\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}\tan\frac{\varphi}{2}$$

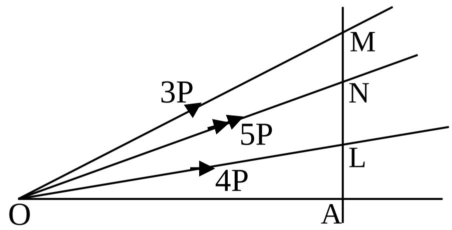
$$\Rightarrow \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-13ঃ $4P$ এবং $3P$ বল দু'টি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং $5P$ তাদের লব্ধি। যদি কোন ছেদক তাদের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে $L,\ M,\ N$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{4}{OL}+\frac{3}{OM}=\frac{5}{ON}$।

অথবা, $4P$ এবং $3P$ বল দু'টি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং $5P$ তাদের লব্ধি। যদি কোন ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে $R,\ S,\ T$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{4}{OR}+\frac{3}{OS}=\frac{5}{OT}$।

সমাধানঃ মনেকরি, $4P$ ও $3P$ বলদু'টি যথাক্রমে OL ও OM বরাবর এবং তাদের লব্ধি $5P$, ON বরাবর ক্রিয়া করে। একটি ছেদক বলগুলির ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, OA রেখাটি ছেদক-এর উপর লম্ব। এখন, OA বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$$4P.\cos LOA + 3P\cos MOA = 5P\cos NOA$$

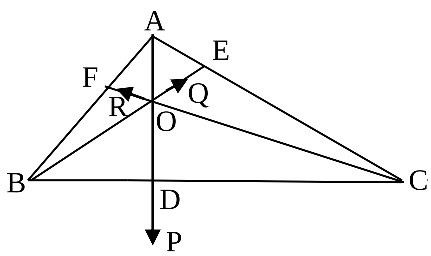
$$\Rightarrow 4P\frac{OA}{OL} + 3P\frac{OA}{OM} = 5P\frac{OA}{ON}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{OL}+\frac{3}{OM}=\frac{5}{ON}$$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-14ঃ P, Q, R বল তিনটি কোন ত্রিভূজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে যথাক্রমে, তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমূখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R=a:b:c$

সমাধানঃ মনেকরি, P, Q, R বলত্রয় ΔABC এর A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে BC, CA ও AB এর উপর লম্বভাবে যথাক্রমে AD, BE ও CF বরাবর ক্রিয়ারত। ধরি, বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin DOE}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)}$$ [$\because$ $AEOF$ চতুর্ভুজে দু'টি কোণ সমকোণ এবং অপর দুটির যোগফল π]

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

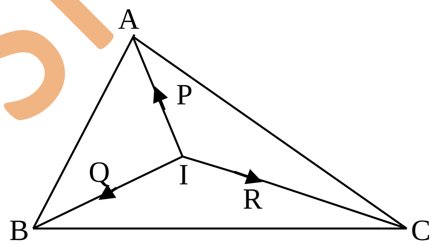
$$\Rightarrow \frac{P}{a/2R'} = \frac{Q}{b/2R'} = \frac{R}{c/2R'} \qquad [\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R']$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$$

$\therefore P: Q: R = a : b : c$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-15ঃ ABC ত্রিভূজের অন্তঃকেন্দ্র I হতে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I হতে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

এখন, $\angle BIC = \pi - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

একইভাবে, $\angle CIA = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$, $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$

$$\therefore (i) \Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi/2 + A/2)} = \frac{Q}{\sin(\pi/2 + B/2)} = \frac{R}{\sin(\pi/2 + C/2)}$$

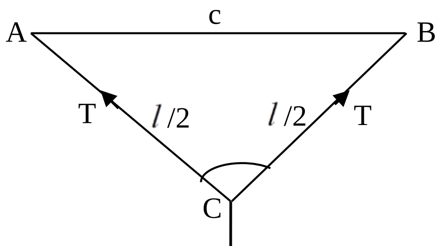
$$\Rightarrow \frac{P}{\cos A/2} = \frac{Q}{\cos B/2} = \frac{R}{\cos C/2}$$

$\therefore P: Q: R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ $\qquad$ $(shown)$

প্রশ্ন-16ঃ একই অনুভূমিক রেখায় c একক দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে l একক দীর্ঘ একটি সরু রশির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। অবাধে ঝুলানো w একক ওজন বিশিষ্ট একটি বস্তুকে বহন করে এমন একটি মসৃণ ওজনবিহীন আংটা ঐ রশির উপর দিয়ে গড়িয়ে যাচ্ছে। দেখাও যে, রশির টান $\frac{l\,w}{2\sqrt{l^2 - c^2}}$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, A ও B বিন্দুদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় c একক দূরত্বে অবস্থিত। l দৈর্ঘ্যের একটি সুতা A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। ধরি, C বিন্দুতে w একক ওজন ঝুলানো আছে এবং সুতার টান T ।

তাহলে, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T, T বলদ্বয়ের লব্ধি w হবে।



$$\therefore\ w^2 = T^2 + T^2 + 2T^2\cos C = 2T^2(1+\cos C)$$

$$= 2T^2\left\{1+\frac{\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}-c^2}{2.\frac{l}{2}.\frac{l}{2}}\right\}$$

$$=2T^2\left\{1+\frac{l^2/2-c^2}{l^2/2}\right\} = 2T^2\left\{\frac{l^2/2+l^2/2-c^2}{l^2/2}\right\}$$

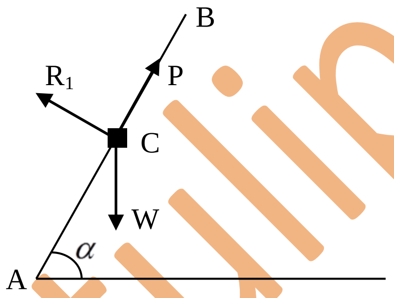
$$=2T^2\left(\frac{l^2-c^2}{l^2/2}\right) \Rightarrow w^2 = 4T^2.\left(\frac{l^2-c^2}{l^2}\right)$$

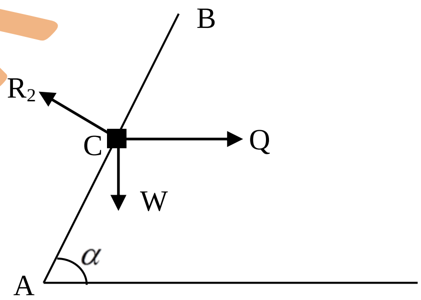
$$\Rightarrow\ T^2 = \frac{w^2 l^2}{4(l^2-c^2)} \qquad \therefore\ T = \frac{wl}{2\sqrt{l^2-c^2}}$$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-17ঃ P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থাকলে প্রত্যেকে একক ভাবে তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$ অথবা, $W=\frac{PQ}{\sqrt{Q^2-p^2}}$

সমাধানঃ





মনেকরি, α কোণে হেলানো AB তলের C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু স্থির অবস্থায় আছে। ধরি, প্রথম ক্ষেত্রে তলের উপর বস্তুর চাপ R_1 এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে চাপ R_2। এখন প্রথম ক্ষেত্রে, বল P,ওজন W এবং চাপ R_1 ভারসাম্য সৃষ্টি করে; সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই, $\frac{P}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin 90^\circ}=\frac{R_1}{\sin(90^\circ+\alpha)}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha}=\frac{W}{1}=\frac{R_1}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha}=W \quad \Rightarrow\ P=W\sin\alpha$$

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বল Q, ওজন W এবং চাপ R_2 ভারসাম্য সৃষ্টি করে; সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই

$$\frac{Q}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{R_2}{\sin 90^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow Q = \frac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

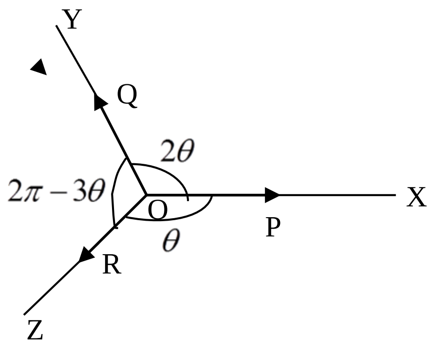
এখন, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-18ঃ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ, P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q\,(Q-P)$।

সমাধানঃ মনেকরি, P, Q, R বল তিনটি O বিন্দু হতে যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত। ধরি, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ θ। সুতরাং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 2θ এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $(2\pi - 3\theta)$।

$\because$ বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin(2\pi - 3\theta)} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{-\sin 3\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{4\sin^3\theta - 3\sin\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{4\sin^2\theta - 3} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{1 - 4\cos^2\theta} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\theta} = \frac{Q-P}{4\cos^2\theta}$$

$\therefore \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\theta}$ .... (1)

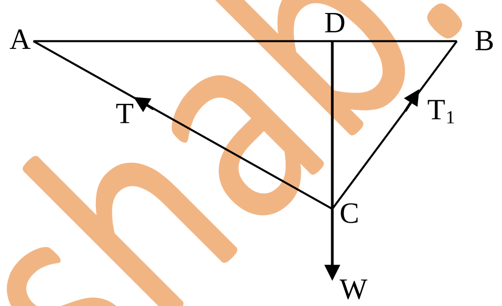
এবং $\frac{Q-P}{4\cos^2\theta} = \frac{R}{2\cos\theta}$ ....(2)

এখন (1) $\times$ (2) $\Rightarrow \frac{Q\,(Q-P)}{4\cos^2\theta} = \frac{R^2}{4\cos^2\theta} \Rightarrow R^2 = Q\,(Q-P)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-19ঃ ACB সুতাটির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখাস্থ A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিঁট দিয়ে বাঁধা আছে। ΔABC এর বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে, দেখাও যে, সুতাটির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}\left(c^2+a^2-b^2\right)$।

সমাধানঃ ধরি, CA ও CB অংশের টান যথাক্রমে T ও T_1। এখন, C বিন্দুতে স্থাপিত W ওজন খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। W ওজনের ক্রিয়ারেখাকে পিছনের দিকে বর্ধিত করলে ধরি, উহা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle DCB = \frac{\pi}{2} - B$ এবং $\angle DCA = \frac{\pi}{2} - A$।

যেহেতু, CA ও CB অংশের টান T ও T_1, W ওজনকে ভারসাম্যে রাখে। সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই,



$$\frac{T}{\sin(\pi - \angle DCB)} = \frac{W}{\sin ACB} = \frac{T_1}{\sin(\pi - \angle DCA)}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + B\right)} = \frac{W}{\sin C} = \frac{T_1}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + A\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin(\pi/2 + B)} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\cos B} = \frac{W}{\sin C} \Rightarrow T = \frac{W\cos B}{\sin C}$$

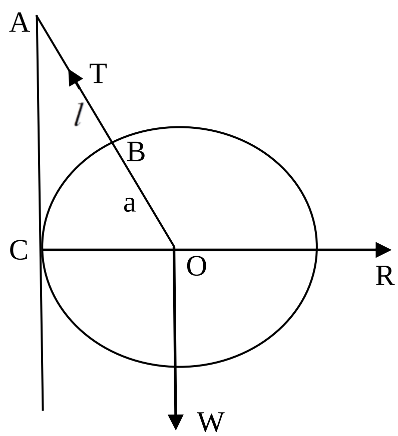
$$\Rightarrow T = \frac{W\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{\frac{2\Delta}{ab}} = \frac{Wb}{4c\Delta}\left(c^2+a^2-b^2\right) \quad \text{(প্রমাণিত)} \quad \left[\because \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C\right]$$

প্রশ্ন-20ঃ l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সুতার একপ্রান্ত খাড়া দেওয়ালে আটকানো আছে এবং তার অপর প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে,দেখাও যে,সুতার টান $\frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$ ।

সমাধানঃ মনেকরি, l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সুতার এক প্রান্ত খাড়া দেয়ালের সাথে A বিন্দুতে, অপর প্রান্ত গোলকের সাথে B বিন্দুতে আটকানো আছে। গোলকের ওজন W কেন্দ্র O বরাবর খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়ারত এবং দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R, CO বরাবর ক্রিয়ারত। ধরি, সুতার টান T । এখন, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত W, R, T বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামীর উপপাদ্য হতে পাই,

$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180^\circ - COA)} = \frac{R}{\sin(90^\circ + COA)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin COA} = \frac{R}{\cos COA}$$



১ম দুটি হতে, $T = \dfrac{W}{\sin COA} = \dfrac{W}{AC/OA}$

$$\Rightarrow T = \frac{W.OA}{AC} = \frac{W(OB+AB)}{\sqrt{OA^2 - OC^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W(a+l)}{\sqrt{(a+l)^2 - a^2}} = \frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}} \qquad [\because AB = l,\ OB = a]$$ (প্রমাণিত)