একাদশ শ্রেণি

অধ্যায়-৮(ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র)

**ফাংশন একটি গাণিতিক ধারণা যা দুটি রাশির মধ্যে পারস্পরিক নির্ভরশীলতা প্রকাশ করে ।

কম্পিউটারে যে সকল Application software ব্যবহৃত হয় সেগুলো ফাংশনের সমন্বয়ে তৈরি ।

অন্বয়ঃ অন্বয় শব্দের অর্থ সম্পর্ক ।দুটি সেটের উপাদান গুলোর মধ্যে কোনো শর্ত সাপেক্ষে একটি সম্পর্ক স্থাপন করলে তখন তাকে অন্বয় বলে ।

আবার, দুটি অশূন্য সেট A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B$ এর যে কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলে। ইহাকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $R \subseteq A \times B$.

মনেকরি, $A = \{1,\ 2\}$ এবং $B = \{3,\ 4\}$, তাহলে $A \times B = \{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$

যদি $R = \{(1,\ 3),\ (2,\ 4)\}$ হয়, তবে R কে A থেকে B সেটে একটি অন্বয় বলে।

অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ : যে কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলি তার ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলি তার রেঞ্জ ।

উপরের উদাহরণে ডোমেন R = {1,2} রেঞ্জ R = {3,4}

ফাংশন ঃ যে অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলো ভিন্ন ভিন্ন সেই অন্বয়কে ফাংশন বলে ।

মনেকরি, A ও B দুটি সেট। যদি A সেট হতে B সেটে f একটি অন্বয় হয় যেন প্রত্যেক $a \in A$ এর জন্য একটি অনন্য উপাদান $b \in B$ থাকে, তবে f কে A সেট হতে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f\ :\ A \longrightarrow B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণঃ

মনেকরি, $A = \{1,\ 2\}$ এবং $B = \{3,\ 4\}$, তাহলে $A \times B = \{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$ এটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয় ।

আবার, মনেকরি, $A = \{1,\ 2\}$ এবং $B = \{3,\ 4\}$, তাহলে $A \times B = \{(1,\ 3),\ (2,\ 4)\}$ এটি অন্বয় এবং ফাংশন নয় ।

ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন, রেঞ্জ এবং প্রতিচ্ছবি এর সংজ্ঞা ঃ

--- একটি ফাংশনের ১ম সেটকে ডোমেন

--- ২য় সেটকে কোডোমেন

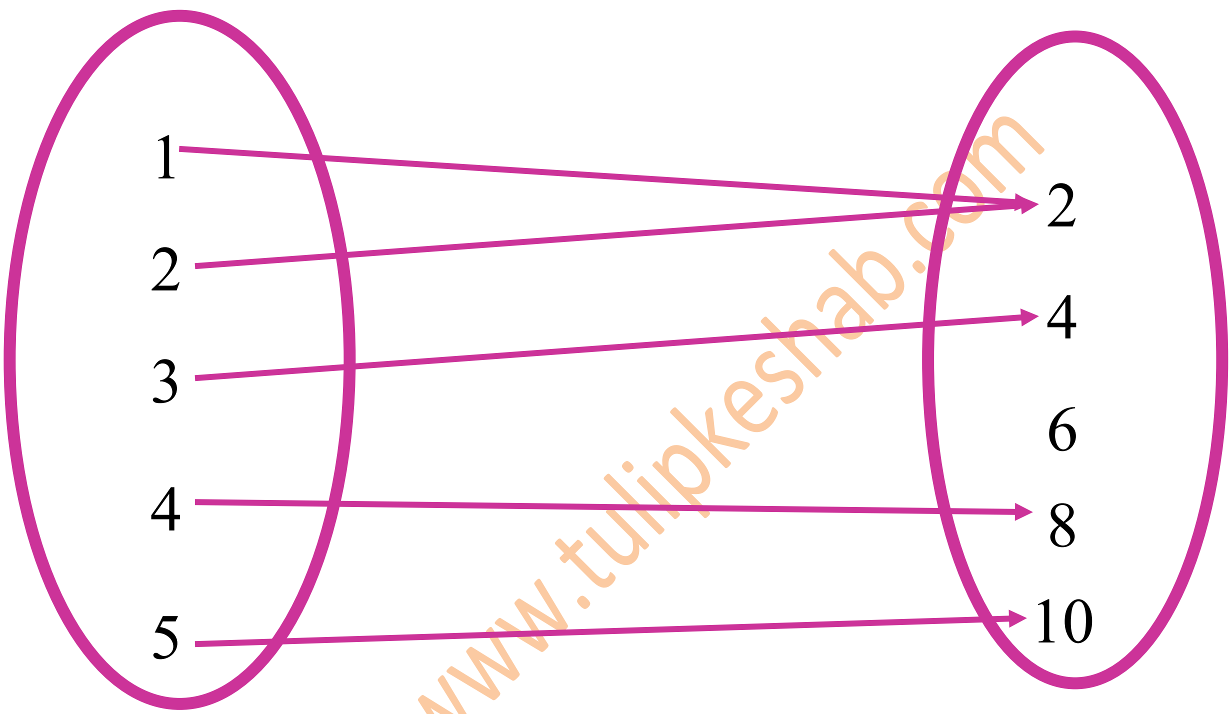
---- আর কোডেমেনের যে সকল উপাদানের সাথে ডোমেনের উপাদান সম্পর্ক স্থাপন করে তাদের সেটকে রেঞ্জ বলে ।

আবার, মনেকরি, $f : A \longrightarrow B$ একটি ফাংশন। এখানে A সেটকে ডোমেন এবং B সেটকে কোডোমেন বলে।

f এর ডোমেনকে D_f এবং কোডোমেনকে Cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

কোডোমেনের যে সকল উপাদানের সাথে ডোমেনের উপাদান যোগাযোগ করে, তাদের সেটকে রেঞ্জ বলে। f এর রেঞ্জকে R_f বা $f(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যদি $a \in A$ এর জন্য $b \in B$ হয়, তবে b কে a এর প্রতিচ্ছবি (image) বলা হয়। ইহাকে $f(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $f(a) = b$।



উপরের উদাহরণে ডোমেন $= \{1,2,3,4,5\}$ রেঞ্জ $= \{2,4,8,10\}$ কেডোমেন $= \{2,4,6,8,10\}$

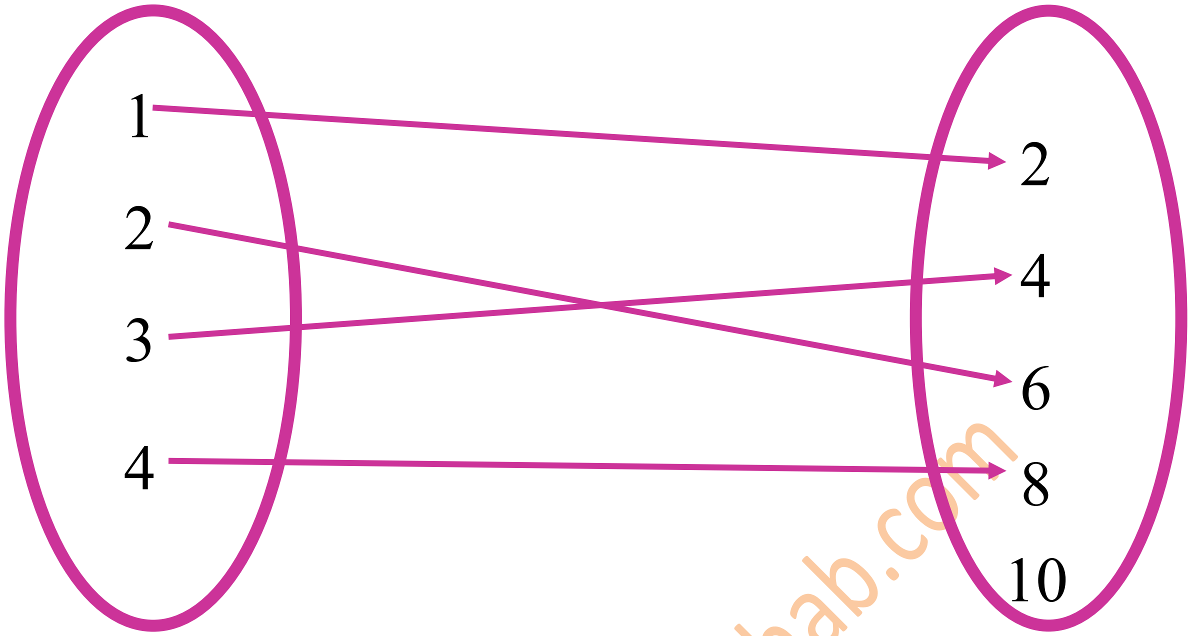
**** অন্বয় এবং ফাংশনের সম্পর্ক :**

---- সকল ফাংশন অন্বয় কিন্তু সকল অন্বয় ফাংশন নয়।

----- ফাংশনের ক্ষেত্রে প্রতিটি ইনপুটের জন্য কেবল মাত্র একটি আউটপুট থাকবে।

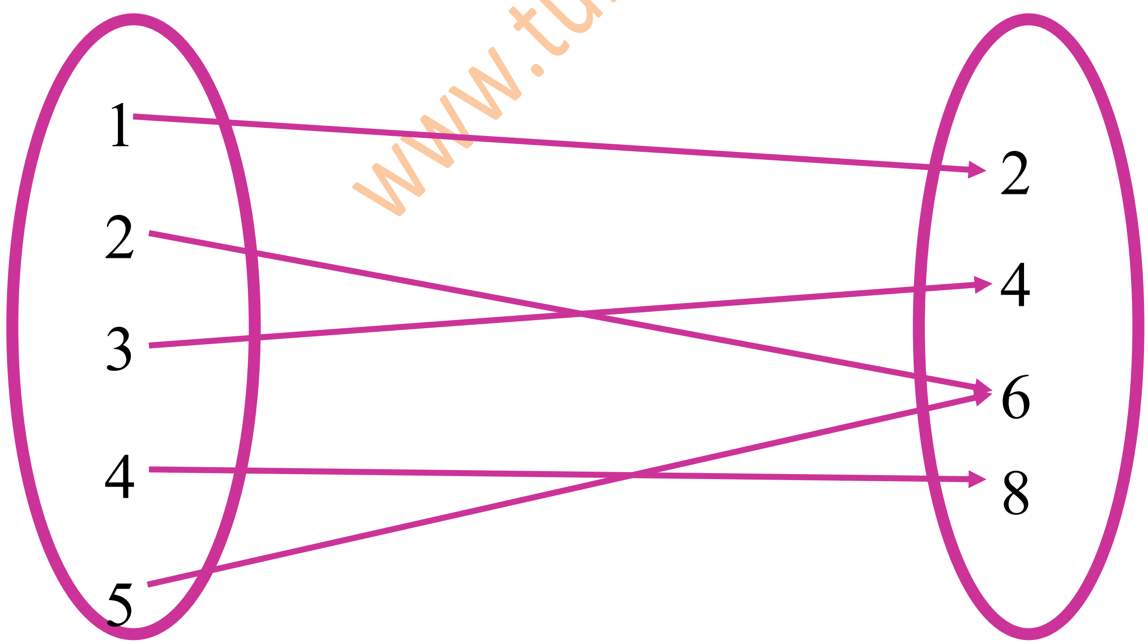
**** ফাংশনের উলম্ব রেখা পরীক্ষা :** *কোন ফাংশনের গ্রাফকে কোন উলম্বরেখা শুধুমাত্র এক জায়গায় ছেদ করবে।*

ফাংশনের প্রকারভেদঃ (ক) এক-এক ফাংশনঃ যদি ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের জন্য কোডোমেনে ভিন্ন ভিন্ন ইমেজ বিদ্যমান থাকে, তবে তাকে এক-এক ফাংশন বলা হয়।



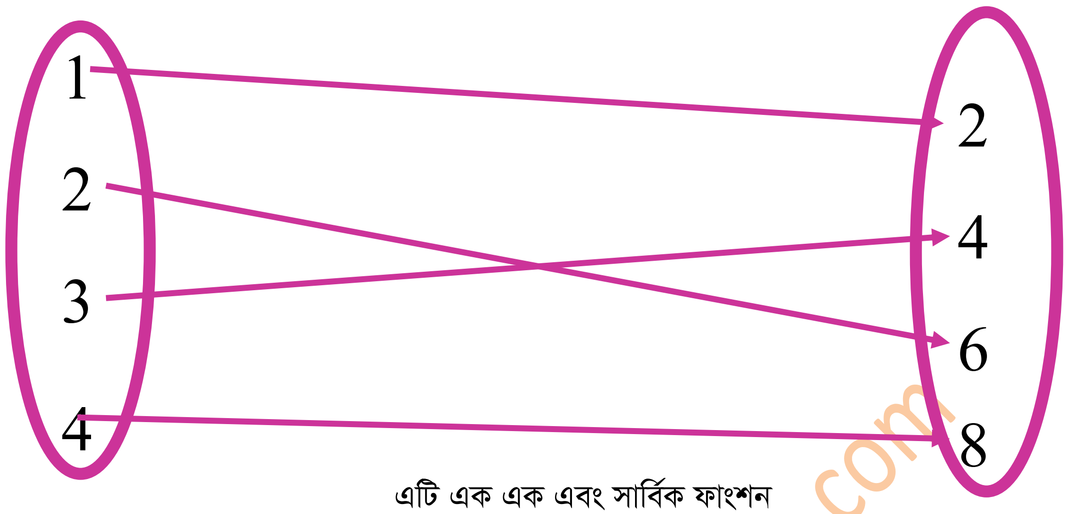
এটি এক এক ফাংশন

(খ) সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশনঃ যদি কোডোমেনের প্রত্যেক উপাদান ডোমেনের অন্তত একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয়, তবে তাকে সার্বিক ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান। অর্থাৎ $f(A) = B$।



এটি সার্বিক ফাংশন

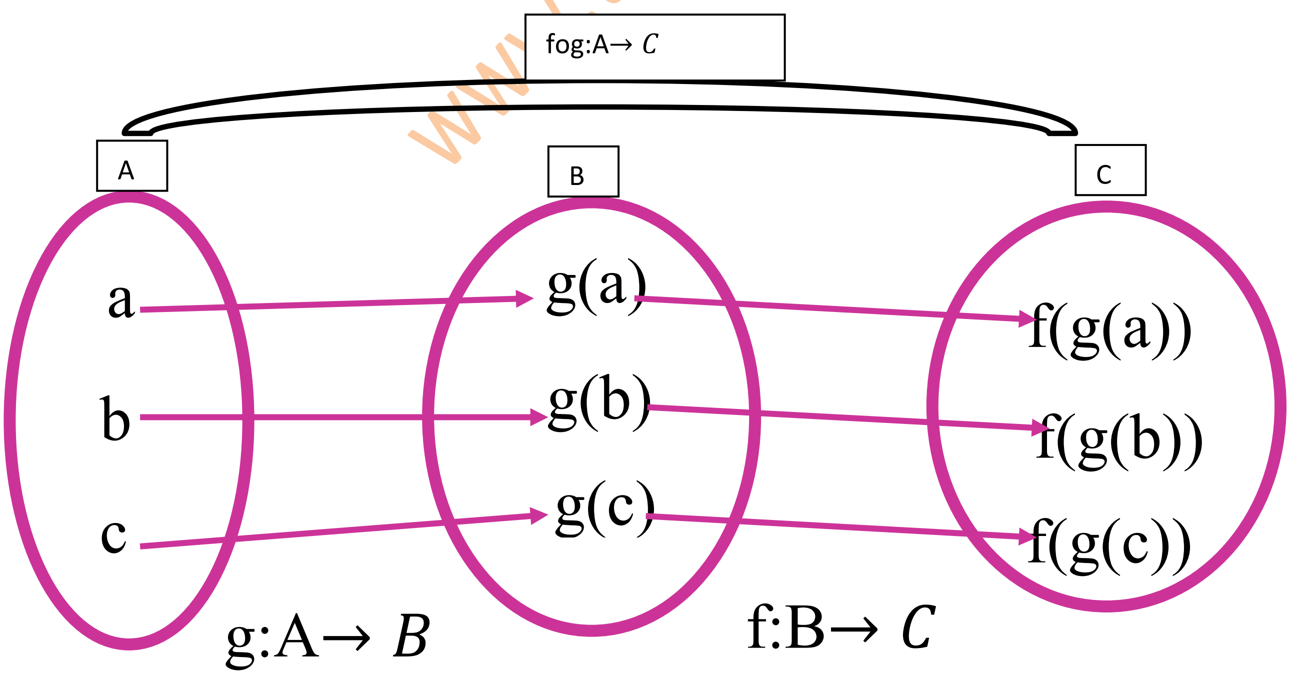
(গ) এক-এক ও সার্বিক(বা, বাইজেকটিভ) ফাংশনঃ যদি কোন ফাংশন একই সাথে এক-এক ও সার্বিক হয়, তবে তাকে এক-এক ও সার্বিক ফাংশন বলে।



এটি এক এক এবং সার্বিক ফাংশন

সংযোজিত ফাংশন ঃ একটি ফাংশনের রেঞ্জ অপর একটি ফাংশনের সাথে ডোমেন হিসাবে সংযোজিত হয়ে যে নতুন ফাংশনের সৃষ্টি কওে তাকে সংযোজিত ফাংশন বলে ।

মনেকরি, $f : A \longrightarrow B$ এবং $g : B \longrightarrow C$; তাহলে f এর সাথে g এর সংযোজিত ফাংশনকে $(g \circ f)$ দ্বারা সূচিত করা হয়; যেখানে $(g \circ f) : A \longrightarrow C$। এখানে প্রত্যেক $a \in A$ এর জন্য $f(a) \in B$ এবং প্রত্যেক $f(a) \in B$ এর জন্য $g\big(f(a)\big) \in C$ । সুতরাং $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$ ।



অভেদ ফাংশন : $f : A \longrightarrow A$ আকারের ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলে ।

যেমন : $f(x) = x$ একটি অভেদ ফাংশন কারন $f(1) = 1$, $f(2) = 2$

**** অভেদ ফাংশন সর্বদাই এক এক এবং সার্বিক ।**

**** ডোমেন এবং রেঞ্জের উপাদান একই ।**

ধ্রুব ফাংশন : ডেমেনের সকল উপাদান যদি কোডোমেনের একটিমাত্র উপাদানের সাথে সম্পর্ক স্থাপন করে তবে তাকে ধ্রুব ফাংশন বলে ।

যেমন : $f(x) = 4$ একটি অভেদ ফাংশন কারন $f(1) = 4$, $f(2) = 4$

**** রেঞ্জ একই রকম ।**

বিপরীত ফাংশনঃ

মনেকরি, $f : A \longrightarrow B$ একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন। যদি একটি ফাংশন $g : B \longrightarrow A$ পাওয়া যায় যেন প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য উপাদান $g(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে, তবে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। ইহাকে f^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $f^{-1} : B \longrightarrow A$।

ফাংশন	বিপরীত ফাংশন
f(x) = x + 5	$f^{-1}(x) = \mathrm{x} - 5$
f(x) = 3x	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$
f(x) = 3x + 7	$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$
f(x) = 2x - 3	$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

বিভিন্ন রকম ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :

আকার	ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
চলকের পূর্ণ আকার	f(x) = x + a f(x) = x f(x) = x – a f(x) = $\frac{x-a}{b}$	$(-\infty, \infty)$ অথবা, $\mathcal{R}$	$(-\infty, \infty)$ অথবা, $\mathcal{R}$
চলকের ভগ্নাংশ আকার	f(x) = $\frac{1}{x-a}$ f(x) = $\frac{x}{x-a}$	$\mathcal{R} - \{a\}$	
	f(x) = $\frac{x-a}{cx+b}$	$\mathcal{R} - \{-\frac{b}{c}\}$	
চলকের বর্গমূল আকার	f(x) = $\sqrt{px+a}$	$[\frac{-a}{p}, \infty)$	$[0, \infty)$
	f(x) = $\sqrt{px-a}$	$[\frac{a}{p}, \infty)$	$[0, \infty)$
	f(x) = $-\sqrt{x-a}$	$[a, \infty)$	$(-\infty, 0]$
	f(x) = $\sqrt{x^2-a^2}$	$x \leq -a$ বা $x \geq a$	$[0, \infty)$
	f(x) = $\sqrt{a^2-x^2}$	$-a \leq x \leq a$	$[0, a]$
বিশেষ আকার	$\frac{px+q}{rx+s}$	$\mathcal{R} - \{\frac{-s}{r}\}$	$\mathcal{R} - \{\frac{p}{r}\}$
	$\frac{x^2-p^2}{x-p}$	$\mathcal{R} - \{p\}$	$\mathcal{R} - \{2p\}$