ধ্যায়-১০ঃ বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাব্যতা

সম্ভাব্যতা

ঘটনা (Event) ঃ

কোন পরীক্ষণের ফলাফল হল ঘটনা। অর্থাৎ, একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে H বা T উঠা এক একটি ঘটনা।

ঘটনজগত বা নমুনাক্ষেত্র ঃ

কোন পরীক্ষণ প্রসুত সকল ঘটনার সেটকে ঘটনজগত বা নমুনাক্ষেত্র বলে। নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দু বা উপাদান কে নমুনা বিন্দু (বা, ঘটনা) বলে। নমুনাক্ষেত্রকে S দ্বারা সূচিত করা হয়।

ছক্কার গুটির ক্ষেত্রে নমুনাক্ষেত্র $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, মুদ্রার ক্ষেত্রে $S=\{H,T\}$।

স্বাধীন ও অধীন ঘটনা ঃ

কোন পরীক্ষণ প্রসুত দুটি ঘটনার মধ্যে একটি ঘটার সম্ভাবনা অপরটি ঘটার উপর নির্ভর না করলে তাদেরকে, স্বাধীন ঘটনা বলে। আর যদি নির্ভর করে তবে তারা অধীন ঘটনা।

উদাহরণঃ (i) দুটি ছক্কার গুটি নিক্ষেপ করলে একটিতে ছক্কা পাওয়ার ঘটনার উপর অন্যটির ছক্কা পাওয়া নির্ভর করে না। ছক্কা পাওয়ার এ ঘটনা দুটি পরস্পর স্বাধীন।

(ii) তাসের প্যাকেট থেকে পুন:স্থাপন না করে পর পর দুটি তাস টানা হল। ১ম টি যে কোন রং এর হতে পারে। কিন্তু ২য় তাসটি একই রং এর হওয়া নির্ভর করছে ১ম টির রং এর উপর। তাই ১ম ঘটনাটি স্বাধীন কিন্তু ২য় ঘটনাটি অধীন।

(iii) দুটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে একটিতে H পাওয়ার ঘটনা অন্যটিতে H পাওয়ার ঘটনার উপর নির্ভর করেনা, তাই ঘটনা দুটি পরস্পর স্বাধীন।

(iv) দুটি থলের একটিতে 5 টি সাদা ও 4 টি লাল বল আছে। অপরটিতে 6 টি সাদা ও 5 টি লাল বল আছে। এখন, ১ম টি থেকে একটি বল তুললে সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা, ২য় টি থেকে একটি বল তুললে তার সাদা হওয়ার সম্ভাবনার উপর নির্ভর করে না । এ ক্ষেত্রে ঘটনা দুটি স্বাধীন।

NB: দুটি ভিন্ন উৎস হওয়ায় ঘটনা দুটি স্বাধীন। যদি ১ম থলে থেকে এক সাথে দুটি বল উঠানো হতো, সেক্ষেত্রে ১ম টি সাদা হওয়ার ঘটনার উপর ২য় টি সাদা হওয়ার ঘটনা নির্ভরশীল হতো।

পরস্পর বর্জনশীল বা বিছিন্ন ঘটনা ঃ

কোন পরীক্ষণ প্রসুত দুই বা ততোধিক ঘটনার যে কোন একটি ঘটলে যদি অপর কোন ঘটনা না ঘটে, তবে ঘটনা গুলোকে পরষ্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে।

পরস্পর অবর্জনশীল বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনা ঃ

কোন পরীক্ষণ প্রসুত দুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটলে যদি অপর কোন ঘটনাও ঘটতে পারে, তবে ঘটনা দুটিকে পরষ্পর অবর্জনশীল ঘটনা বলে।

উদাহরণঃ (i) কোন বাক্সে লাল, নীল ও সাদা রং এর কিছু বল আছে। দৈবচয়নে তাদের মধ্য থেকে একটি বল তোলা হলে, বলটি যদি লাল হয়, তবে নীল বা সাদা হতে পারবে না। তাই বলটি লাল, নীল বা সাদা হওয়ার ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন।

(ii) 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে 3 খানা তাস টানা হল। তাস তিনটির ইস্কাবন হওয়ার ঘটনা A এবং কালো রং এর হওয়ার ঘটনা B হলে, A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

$NB:$ তিন রং (লাল, নীল ,সাদা) এবং 3 খানা নেওয়া হয়েছে দুই এর অধিক ঘটনা বুঝানোর জন্য।

(iii) ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এ ছয়টি ঘটনার কেবল একটি ঘটবে। এ 6 টি ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন।

(iv) একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে H বা T কোন একটি উপরে থাকবে। অর্থাৎ 2 টি ঘটনার মধ্যে কেবল 1 টি ঘটবে। এ দুটি ঘটনা পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

(v) দুটি ঘটনার মধ্যে যদি কোন সাধারণ উপাদান (ঘটনা) থাকে, তবে ঘটনাদ্বয় পরস্পর অবিচ্ছিন্ন। যেমনঃ
$A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$ $\therefore A\cap B=\{6\}$ তাহলে, A ও B ঘটনা দুটি অবিচ্ছিন্ন।

সম-সম্ভাব্য ঘটনাঃ কোন পরীক্ষণের ঘটনজগতের ঘটনা গুলোর প্রত্যেকটি ঘটার সম্ভাবনা সমান হলে, ঘটনা গুলোকে সম-সম্ভাব্য ঘটনা বলে।

যেমনঃ (i) মুদ্রার ঘটনজগত $S=\{H,T\}$; এখন H বা T পাওয়ার সম্ভাব্যতা সমান। তাই তারা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

(ii) ছক্কার ঘটনজগত $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। এখন 6 টি ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা সমান। তাই তারা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

নোটঃ (i) সম-সম্ভাব্য ঘটনা সর্বদা বর্জনশীল এবং স্বাধীন।

(ii) 52 খানা তাসের মধ্যে একটি তাস টানলে সেটি টেক্কা হওয়ার ঘটনা এবং সেটি হরতন হওয়ার ঘটনা সম-সম্ভাব্য নয়।

সম্ভাব্যতাঃ

কোন ঘটনা ঘটবে কি ঘটবে না, তার গাণিতিক পরিমাপকে সম্ভাব্যতা বলে। সম্ভাব্যতার গাণিতিক পরিমাপ হচ্ছে, সম-সম্ভাব্য অনুকূল ঘটনা সংখ্যা এবং সম-সম্ভাব্য মোট ঘটনা সংখ্যার অনুপাত।

উদাহরণঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে ঘটনজগত $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবংজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা $A=\{2,4,6\}$। এখানে, $n(S)=6$, $n(A)=3$। সুতরাং A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

প্রশ্নঃ দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্রটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা তাদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে এবং A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A)$, B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B)$ হলে, এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাব্যতা,

$P(A \text{ অথবা } B) = P(A) + P(B)$ ।

প্রমাণঃ ধরি, S ঘটনজগতের সাথে সংশ্লিষ্ট A ও B দু'টি বর্জনশীল ঘটনা।

যেখানে, ঘটনজগত S এর মোট উপাদান সংখ্যা $= n(S)$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $= n(A)$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $= n(B)$

$\therefore$ সেটতত্ত্ব হতে পাই, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\therefore \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \text{ -------- } (i)$$

$\because A$ ও B বর্জনশীল ঘটনা সুতরাং, $n(A \cap B) = 0$

তাহলে, $(i) \Rightarrow \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)}$

$\Rightarrow P(A \cup B) = p(A) + P(B)$ [সম্ভাব্যতার সংজ্ঞানুসারে]

$\Rightarrow P(A \text{ অথবা } B) = P(A) + P(B)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নঃ দুটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্রের বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ দুটি অবর্জনশীল ঘটনার যে কোন একটি ঘটার সম্ভাব্যতা তাদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার সমষ্টি হতে তাদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিয়োগফলের সমান।

অর্থাৎ, A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা। A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A)$, B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B)$ এবং তাদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cap B)$ হলে, তাদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

প্রমাণঃ ধরি, ঘটনজগত S এর মোট উপাদান সংখ্যা $= n(S)$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $= n(A)$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $= n(B)$

$\therefore$ সেটতত্ত্ব হতে, $n(S) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নঃ তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্রের বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

Keshab Lal Nath,BCS Edn,Lecturer in math and Ict, Chowmuhani Govt. s. a. College
Phone – 01818397079, Email : ktulip71@gmail.com, web : www.tulipkeshab.com

উত্তরঃ বর্ণনাঃ তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার যে কোন একটি ঘটার সম্ভাব্যতা তাদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার সমষ্টি হতে (১ম, ২য়), (২য়, ৩য়), (৩য়, ১ম) ঘটনার একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিয়োগফলের সাথে তিনটি ঘটনার একত্রে ঘটার সম্ভাবত্যার সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

প্রমাণঃ ধরি, ঘটনজগত S এ A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা।

এখন, দুটি অবর্জনশীল ঘটনার জন্য আমরা পাই, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

তাহলে, $P(A\cup B\cup C)=P\{A\cup(B\cup C)\}$

$$=P(A)+P(B\cup C)-P\{A\cap(B\cup C)\}$$

$$=P(A)+P(B\cup C)-P\{(A\cap B)\cup(A\cap C)\}$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P\{(A\cap B)\cap(A\cap C)\}$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

শর্তাধীন সম্ভাব্যতা ঃ

কোন পরীক্ষণে যদি একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা অন্য কোন ঘটনা পূর্বে ঘটেছে তার উপর নির্ভর করে, তবে এরূপ ঘটনার সম্ভাব্যতাকে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলে।

A ঘটনাটি পূর্বে ঘটেছে এ শর্তাধীনে B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B/A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

আবার, B ঘটনাটি পূর্বে ঘটেছে এ শর্তাধীনে A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A/B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$

নোটঃ শর্তাধীন সম্ভাব্যতা এবং শর্তাধীন ঘটনা এক নয়।

প্রশ্নঃ দু'টি স্বাধীন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার গুণন সূত্রটি বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

বর্ণনা ঃ দুটি স্বাধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা এদের পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার গুণফলের সমান।

অর্থাৎ A, B দুটি স্বাধীন ঘটনা হলে, $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

প্রমাণঃ মনেকরি, E_1 একটি স্বাধীন পরীক্ষার S_1 নমুনা ক্ষেত্রে A একটি স্বাধীন ঘটনা এবং E_2 অপর একটি পরীক্ষার S_2 নমুনা ক্ষেত্রে B একটি স্বাধীন ঘটনা। S_1 ও S_2 নমুনাক্ষেত্রদ্বয়ের উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে $n(S_1)$ ও $n(S_2)$ । আবার A ও B ঘটনা দু'টির উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে $n(A)$ ও $n(B)$ ।

$$\therefore P(A)=\frac{n(A)}{n(S_1)},\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S_2)}$$

যেহেতু, E_1, E_2 পরীক্ষা দু'টি স্বাধীন। সুতরাং S_1, S_2 নমুনা ক্ষেত্রদ্বয়ের উপাদানগুলো স্বাধীনভাবে যুক্ত হতে পারে। এ পরীক্ষা দু'টি দ্বারা সৃষ্ট সম্মিলিত নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা $= n(S_1).\, n(S_2)$

অনুরূপভাবে, A এবং B দু'টি স্বাধীন ঘটনা যুক্ত হয়ে $(A\cap B)$ যৌগিক ঘটনা সৃষ্টি হবে, যার উপাদান সংখ্যা $n(A\cap B) = n(A).\, n(B)$

অতএব, $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S_1)\, n(S_2)} = \dfrac{n(A).\, n(B)}{n(S_1).\, n(S_2)} = \dfrac{n(A)}{n(S_1)}.\dfrac{n(B)}{n(S_2)}$

$\therefore P(A\cap B) = P(A).P(B)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নঃ দু'টি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার গুণন সূত্রটি বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ দু'টি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা এদের যে কোন একটির সম্ভাব্যতা এবং অপরটির শর্তাধীন সম্ভাব্যতার গুণফলের সমান।

i.e. A ও B দু'টি অধীন ঘটনা হলে, $P(A\cap B) = P(A).\, P(B/A) = P(B).\, P(A/B)$

প্রমাণঃ মনেকরি, কোন পরীক্ষণে ঘটনা জগত S এর সাথে সংশ্লিষ্ট দু'টি অধীন ঘটনা A ও B। ঘটনা জগত S এর মোট উপাদান সংখ্যা $= n(S)$, A ঘটনার উপাদান সংখ্যা $= n(A)$, B ঘটনার উপাদান সংখ্যা $= n(B)$ এবং $(A\cap B)$ ঘটনার উপাদান সংখ্যা $= n(A\cap B)$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)},\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)},\ P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$

এখন, A ঘটনা ঘটেছে এ শর্তাধীনে B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(B/A) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$...........(i)

আবার, A ও B ঘটনা দু'টি একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)} = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}.\dfrac{n(A)}{n(S)}$

$= P(B/A).\ P(A)$ **[(*i*)** নং দ্বারা]

$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A).\, P(B/A)$

একইভাবে, B ঘটনা ঘটেছে এ শর্তাধীনে A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা নিয়ে দেখানো যায় যে,

$P(A\cap B) = P(B).\, P(A/B)$

$\therefore P(A\cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).\, P(A/B)$ (প্রমাণিত)

বায়েস-এর উপপাদ্যটি বর্ণনা সহ প্রমাণ কর।

উত্তরঃ বর্ণনাঃ মনেকরি, পরস্পর বর্জনশীল এবং সম-সম্ভাব্য n সংখ্যক ঘটনা $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ এবং এদের সংযোগে কোন পরীক্ষণের ঘটনা জগত S তৈরী হয়। যদি S এর একটি ঘটনা A এবং $P(A) > 0$ হয়, তবে

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)};\quad \text{যেখানে } i = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

প্রমাণঃ শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা হতে পাই, $P(B_i \cap A) = P(B_i).P(A/B_i) = P(A).P(B_i/A)$

$$\Rightarrow P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

A ঘটনা কেবল $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ এর সংযোগে ঘটতে পারে। সুতরাং A তখনই ঘটবে, যখন পরস্পর বর্জনশীল যৌগিক ঘটনা $B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$, $B_n \cap A$ ঘটে।

অর্থাৎ, $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(B_n \cap A)$

$= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(B_n)P(A/B_n)$ (শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা)

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $P(B_i/A) = \dfrac{P(B_i).P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী-10.1(হাবিব),অনুশীলনী-10.B(অসীম)

নম্বর-16(হাবিব),20(অসীম)ঃ দু'টি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, তাদের নমুনা ক্ষেত্র তৈরী কর এবং দু'টি ছয় উঠার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। উভয় ছক্কায় একই সংখ্যা উঠার সম্ভাব্যতাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দু'টি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, নমুনা ক্ষেত্রটি হবে নিম্নরূপঃ

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

এখন, মোট নমুনা বিন্দু $=36$ টি, দুটি ছয় উঠার অনুকূল নমুনা বিন্দু $=1$ টি

$\therefore$ দুটি 6 উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{36}$ (উত্তর)

উভয় ছক্কায় একই সংখ্যা উঠার নমুনা বিন্দু = 6 টি

$\therefore$ উভয় ছক্কায় একই সংখ্যা উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ (উত্তর)

নম্বর-21(অসীম)ঃ একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, তাদের নমুনা ক্ষেত্র তৈরী কর। (ক) দুটি হেড ও জোড় সংখ্যা এবং(খ) ছক্কায় 4 উঠার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, নমুনা ক্ষেত্র নিম্নরূপ ঃ

	1	2	3	4	5	6
HH	$HH1$	$HH2$	$HH3$	$HH4$	$HH5$	$HH6$
HT	$HT1$	$HT2$	$HT3$	$HT4$	$HT5$	$HT6$
TH	$TH1$	$TH2$	$TH3$	$TH4$	$TH5$	$TH6$
TT	$TT1$	$TT2$	$TT3$	$TT4$	$TT5$	$TT6$

এখানে, মোট নমুনা বিন্দু $=24$ টি

দুটি হেড ও জোড় সংখ্যা পাবার নমুনা বিন্দু = 3 টি

সুতরাং দুটি হেড ও জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা $=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ (উত্তর)

ছক্কায় 4 উঠার নমুনা বিন্দু $=4$ টি

$\therefore$ ছক্কায় 4 উঠার সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ (উত্তর)

নম্বর-7(iii)(অসীম)ঃ $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}, A$ ও B স্বাধীন হলে $P(A\cup B)$ এবং $P(A\cap B)$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$ [$\because A$ ও B স্বাধীন]

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$

$$=\frac{4+9-3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$ (উত্তর)

নোটঃ (i) A ও B বর্জনশীল হলে, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (ii) **স্বাধীন হলে,** $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

নম্বর-18(হাবিব)ঃ A ও B স্বাধীন ঘটনা এবং $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{5}{7}$ হলে $P(A\cup B)$ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{37}{35}$

নম্বর-7(iv)(অসীম)ঃ $P(A\cap B)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{5}{6}, P(A)=\frac{1}{2}$ হলে, $P(B)$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5-3+2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$ (উত্তর)

নম্বর-19(হাবিব)ঃ $P(A\cap B)=\frac{1}{4}, P(A\cup B)=\frac{5}{6}, P(B)=\frac{3}{4}$ হলে, $P(A)$ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{1}{3}$

নম্বর-7(v)(অসীম)ঃ যদি $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ এবং $P(A/B)=\frac{3}{8}$ হয়,তবে $P(B/A)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ এবং $P(A/B)=\frac{3}{8}$

আমরা জানি, $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B).P(B)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$$

সুতরাং $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{20}$ (উত্তর)

নম্বর-8(হাবিব),16(অসীম)ঃ একজন ছাত্রের বাংলায় পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3}$, বাংলা ও গণিত দুটি বিষয়ে পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{14}{45}$ এবং দুটির যে কোন একটিতে পাশের সম্ভাব্যতা $\frac{4}{5}$ হলে, তার গণিতে পাশের সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ মনেকরি, বাংলায় পাশের সম্ভাব্যতা $= P(B)=\frac{2}{3}$

গণিতে পাশের সম্ভাব্যতা $=P(M)=$?

Keshab Lal Nath,BCS Edn,Lecturer in math and Ict, Chowmuhani Govt. s. a. College
Phone – 01818397079, Email : ktulip71@gmail.com, web : www.tulipkeshab.com

$\therefore$ বাংলা ও গণিত দুটি বিষয়ে পাশের সম্ভাব্যতা $=P(B\cap M)=\frac{14}{45}$

বাংলা বা গণিতে পাশের সম্ভাব্যতা $=P(B\cup M)=\frac{4}{5}$

$\therefore P(B\cup M)=P(B)+P(M)-P(B\cap M)$

$\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{2}{3}+P(M)-\frac{14}{45}$

$\Rightarrow P(M)=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+\frac{14}{45}=\frac{36-30+14}{45}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$

$\therefore$ ছাত্রটির গণিতে পাশের সম্ভাব্যতা $=\frac{4}{9}$ (উত্তর)

নম্বর-18(হাবিব)ঃ A ও B এর একটি অংক সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ । তারা একত্রে অংকটি সমাধানের চেষ্টা করলে অংকটির সমাধান নির্ণয়ের সম্ভাব্যতা কত?

অথবা, দোলন ও গন্ধা একটি অংক সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ । তারা একত্রে অংকটি সমাধানের চেষ্টা করলে অংকটির সমাধান নির্ণয়ের সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, A এর অংকটি সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{3}$

সুতরাং A এর অংকটি সমাধান না করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

আবার, দেওয়া আছে, B এর অংকটি সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{4}$

সুতরাং B এর অংকটি সমাধান না করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

অতএব, A ও B এর একত্রে অংকটি সমাধান না করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore A$ ও B এর একত্রে অংকটি সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা $=\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (উত্তর)

নম্বর-28(হারুন)ঃ একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6 টি সাদা, 7 টি লাল এবং 9 টি কালো বল আছে। এলোমেলো ভাবে 1 টি বল তুলে নেওয়া হল। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $=6+7+9=22$ টি

Keshab Lal Nath,BCS Edn,Lecturer in math and Ict, Chowmuhani Govt. s. a. College
Phone – 01818397079, Email : ktulip71@gmail.com, web : www.tulipkeshab.com

নিরপেক্ষভাবে একটি বল তুললে সেটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{22}$

নিরপেক্ষভাবে একটি বল তুললে সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{6}{22}$

উপরোক্ত ঘটনা দুটি বর্জনশীল, সুতরাং বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{22} + \frac{6}{22} = \frac{13}{22}$ (উত্তর)

নম্বর-29(হারুন)ঃ একটি বাক্সে লাল 4টি, নীল 5টি, সাদা 7টি বল আছে। নিরপেক্ষভাবে একটি তুললে সেটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? সমাধান ঃ (একই রকম)

নম্বর-24(অসীম)ঃ একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6 টি সাদা, 7 টি লাল বল আছে। এলোমেলো ভাবে 1 টি বল তুলে নেওয়া হল। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ উত্তরঃ 1

নম্বর-28(অসীম)ঃ একটি ব্যাগে 4টি সাদা এবং 5 টি কালো বল আছে। একজন লোক নিরপেক্ষ ভাবে তিনটি বল উঠালেন, তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ ব্যাগে মোট বলের সংখ্যা $= 4 + 5 = 9$টি

এখন, 5টি কালো বল থেকে 3টি কালো বল তোলা যায় ${}^5c_3$ ভাবে,

আবার 9টি বল থেকে 3টি বল তোলা যায় ${}^9c_3$ ভাবে ।

$\therefore$ তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{{}^5c_3}{{}^9c_3} = \frac{5}{42}$ (উত্তর)

একটি থলেতে 5 টি সাদা, 7 টি লাল এবং 8 টি কালো বল আছে। এলোমেলো ভাবে তিনটি বল তুলে নেওয়া হল। বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $= 5 + 7 + 8 = 20$ টি

এখন, 7 টি লাল বল থেকে 3 টি লাল বল তোলা যায় $= {}^7c_3$ উপায়ে

5 টি সাদা বল থেকে 3 টি সাদা বল তোলা যায় $= {}^5c_3$ উপায়ে

20 টি বল থেকে 3 টি বল তোলা যায় $= {}^{20}c_3$ উপায়ে

$\therefore$ এলোমেলো ভাবে 3 টি বল তুললে বলগুলো লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{{}^7c_3}{{}^{20}c_3} = \frac{35}{1140} = \frac{7}{228}$

আবার, এলোমেলো ভাবে 3 টি বল তুললে বলগুলো সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{{}^5c_3}{{}^{20}c_3} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$

সুতরাং বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \left(\frac{7}{228}+\frac{1}{114}\right)=\frac{9}{228}=\frac{3}{76}$ (উত্তর)

নম্বর-29(অসীম)ঃ একটি বাক্সে 7 টি লাল বল এবং 5 টি কালো আছে। নিরপেক্ষভাবে 4 টি বল তুলে নেওয়া হল। তাদের মধ্যে 2 টি লাল এবং 2 টি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ উত্তরঃ 1

নম্বর-23(অসীম)ঃ 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো হতে একটি সংখ্যা বাছাই করা হলে, সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 10 থেকে 30 পর্যন্ত মোট সংখ্যা = 21 টি ।

এদের মধ্যে মৌলিক সংখ্যা হচ্ছে 11, 13, 17, 19, 23, 29 ; অর্থাৎ মোট = 6 টি।

আবার 5 এর গুণিতক হচ্ছে 10, 15, 20, 25, 30 ; অর্থাৎ মোট = 5 টি।

$\therefore$ নিরপেক্ষভাবে 1টি সংখ্যা নিলে সেটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{6}{21}$

এবং 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{5}{21}$

$\therefore$ সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{6}{21}+\frac{5}{21}=\frac{11}{21}$ ($\because$ বিচ্ছিন্ন ঘটনা)

নম্বর-20(হারুন)ঃ প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়সহ 50 ও 60 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো হতে নিরক্ষেপভাবে যে কোন একটি সংখ্যা বাছাই করলে সেটা (i) মৌলিক ; (ii) 8 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়সহ 50 ও 60 এর মধ্যবর্তী সংখ্যা = 11টি

এদের মধ্যে মৌলিক সংখ্যা 53, 59 (অর্থাৎ 2 টি) এবং 8 এর গুণিতক কেবল =56

$\therefore (i)$ সংখ্যাটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{2}{11}$, (ii) সংখ্যাটি 8 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{11}$

নম্বর-24(হারুন)ঃ একটি থলিতে 3 টি সাদা ও 2টি কালো বল আছে। অপর একটি থলেতে 2 টি সাদা এবং 5 টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলে থেকে একটি করে বল তোলা হল। দুটি বলের মধ্যে অন্ততঃ একটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ দুটি বলের মধ্যে অন্ততঃ একটি সাদা নিম্নোক্ত উপায়ে হতে পারেঃ

(i) উভয়ই সাদা (ii) ১ম থলে হতে সাদা, ২য় থলে হতে কালো (iii) ১ম থলে হতে কালো, ২য় থলে হতে সাদা

এখন, (i) নং এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা $=\frac{3}{5}.\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$

(ii) নং এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা $=\frac{3}{5}.\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$

(iii) নং এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা $= \frac{2}{5}.\frac{2}{7} = \frac{4}{35}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{6}{35} + \frac{3}{7} + \frac{4}{35} = \frac{6+15+4}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ (উত্তর)

একটি থলিতে 4 টি সাদা ও 5 টি লাল বল আছে। অপর একটি থলেতে 6 টি সাদা এবং 3 টি লাল বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলে থেকে একটি করে বল তোলা হল। দুটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? সমাধান ঃ নিজে কর। উত্তরঃ

নম্বর-6(হাবিব),উদা-9(অসীম)ঃ গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 40 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল করেছে। নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার পরিসংখ্যানে পাস ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

উত্তর ঃ গণিতে ফেল করে = 40 জন, উভয় বিষয়ে ফেল করে =10 জন

$\therefore$ গণিতে ফেল কিন্তু পরিসংখ্যানে পাশ করে =(40 –10) =30 জন।

$\therefore$ একজন ছাত্র বাছাই করলে, তার পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেলের সম্ভাব্যতা $= \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$ (উত্তর)

নম্বর-25(ii)(অসীম)ঃ একটি বাক্সে 5টি লাল ও 10 টি সাদা মার্বেল (বা,বল)আছে। একটি বালক যেমন খুশী টানলে প্রতিবারে (i) দুটি ভিন্ন রং এর মার্বেল পাবার সম্ভাব্যতা কত? (ii) দুটি একই রং এর বল পাবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ বাক্সে মোট মার্বেল =15টি।

15 টি থেকে 2 টি উঠানো যায় $= {}^{15}C_2$ উপায়ে।

আবার 5 টি লাল মার্বেল থেকে 1 টি উঠানো যায় $= {}^{5}C_1$ উপায়ে।

10 টি সাদা মার্বেল থেকে 1 টি উঠানো যায়= ${}^{10}C_1$ উপায়ে।

$\therefore$ দুটি ভিন্ন রং এর মার্বেল উঠানো যায় = ${}^{5}C_1 \times {}^{10}C_1$ উপায়ে

$\therefore$ প্রতিবারে দু'টি ভিন্ন রং এর মার্বেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{\text{অনুকূল ঘটনা}}{\text{মোট ঘটনা}} = \frac{{}^{5}C_1 \times {}^{10}C_1}{{}^{15}C_2} = \frac{10}{21}$

নম্বর-15(অসীম)ঃ একটি কলেজে একাদশ শ্রেণীর 40 জন ছাত্রের মধ্যে 20 জন ফুটবল খেলে, 25 জন ক্রিকেট খেলে এবং 10 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্যে থেকে দৈবচয়নে একজনকে নির্বাচন করা হল। যদি ছেলেটি ফুটবল খেলে তবে তার ক্রিকেট খেলার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধানঃ শুধু ফুটবল খেলে = (20-10) = 10 জন

শুধু ক্রিকেট খেলে = (25-10) = 15 জন।

এক বা দুই খেলা খেলে মোট = 10+15+10 = 35 জন।

$\therefore$ ছেলেটি ফুটবল খেললে তার ক্রিকেট খেলার সম্ভাব্যতা $=\left(\frac{20}{35}\times\frac{25}{35}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{49}$ (উত্তর)

নোটঃ 35 জন কোন না কোন খেলা খেলে, বাকী 5 জন কোন খেলাই খেলে না। এজন্য 40 নেওয়া হয়নি।

নম্বর-31(অসীম)ঃ দু'টি একই রকম বাক্সের প্রথমটিতে 4 টি সাদা ও 3 টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3 টি সাদা ও 7 টি লাল বল আছে। সম-সম্ভাব্য উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল। ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? যদি বলটি সাদা হয়,তাহলে তা প্রথম বাক্স হতে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ দুটি বাক্সের মধ্যে ১ম বাক্স নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{2}$

১ম বাক্সটি নির্বাচিত হওয়ার পর ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষ ভাবে একটি বল তুললে,

সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{2}.\frac{4}{4+3}=\frac{2}{7}$ [$\because$ ১ম বাক্সে মোট বল $=7$ টি]

একইভাবে, ২য় বাক্সটি নির্বাচিত হওয়ার পর ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল তুললে,

সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{2}.\frac{3}{3+7}=\frac{3}{20}$

$\therefore$ বলটি সাদা হওয়ার মোট সম্ভাব্যতা $=\frac{2}{7}+\frac{3}{20}=\frac{61}{140}$ (উত্তর)

আবার, বলটি যদি সাদা হয়, তাহলে সেটি ১ম বাক্স হতে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{61}{140}}=\frac{2}{7}\times\frac{140}{61}$

$=\frac{40}{61}$ (উত্তর)

....

Keshab Lal Nath,BCS Edn,Lecturer in math and Ict, Chowmuhani Govt. s. a. College
Phone – 01818397079, Email : ktulip71@gmail.com, web : www.tulipkeshab.com