

দ্বাদশ শ্রেণি

উচ্চতর গণিত

অধ্যায়-১০ঃ বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাব্যতা

অনুশীলনী 10.A

$-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ প্রদত্ত সংখ্যাগুলি $-2a, -a, 0, a, 2a$

$$\therefore \text{তাদের গড়, } \bar{x} = \frac{-2a - a + 0 + a + 2a}{5} = 0$$

$$\text{গড় ব্যবধান, } MD_{\bar{x}} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{|-2a - 0| + |-a - 0| + |0 - 0| + |a - 0| + |2a - 0|}{5} = \frac{6a}{5} \quad (\text{উত্তর})$$

$$\text{এখন, } \sum x_i^2 = (-2a)^2 + (-a)^2 + 0^2 + (a)^2 + (2a)^2 = 10a^2$$

$$\therefore \text{পরিমিত ব্যবধান, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{5} - 0} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} a \quad (\text{উত্তর})$$

***যদি শ্রেণি ব্যবধান এবং গণসংখ্যা দেয়া না থাকে তাহলে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করার জন্য উপরোক্ত সূত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক হবে।

নিচের উপাত্ত গুলোর পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ 16, 12, 14, 15, 18

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক, পরিসরাঙ্ক, চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

নম্বর	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্র সংখ্যা	4	6	10	25	10	6	4

সমাধানঃ প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনঃ

নম্বর (x)	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্র সংখ্যা (f)	4	6	10	25	10	6	4
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	20	45	55	61	65

১. পরিসর, $R = 70 - 10 = 60$ (উত্তর)

২. পরিসরাঙ্ক, $CR = \frac{70-10}{70+10} \times 100 = \frac{60}{80} \times 100 = 75\%$ (উত্তর)

৩. চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $Q_1 = \frac{(65+1) \times 1}{4}$ তম পদ = $\frac{66}{4}$ তম পদ = 16.5 তম পদ

16.5 তম পদের বিপরীতে x চলকের মান = 30, $\therefore Q_1 = 30$

আবার $Q_3 = \frac{(65+1) \times 3}{4}$ তম পদ = $\frac{66 \times 3}{4}$ তম পদ = 49.5 তম পদ

49.5 তম পদের বিপরীতে x চলকের মান = 50, $\therefore Q_3 = 50$

\therefore চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50 - 30}{2} = 10$ (উত্তর)

৪. চতুর্থক ব্যবধানাক্ষ, $CQD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$= \frac{50 - 30}{50 + 30} \times 100 = \frac{20}{80} \times 100 = 25\%$ (উত্তর)

৫. গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{40 + 120 + 300 + 1000 + 500 + 360 + 280}{65} = \frac{2600}{65} = 40$ (উত্তর)

৬. গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$

$= \frac{4|10 - 40| + 6|20 - 40| + 10|30 - 40| + 25|40 - 40| + 10|50 - 40| + 6|60 - 40| + 4|70 - 40|}{65}$

$= \frac{120 + 120 + 100 + 0 + 100 + 120 + 120}{65} = \frac{680}{65} = 10.46$ (উত্তর)

৭. গড় ব্যবধানাক্ষ, $CMD_{\bar{x}} = \frac{MD_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10.46}{40} \times 100 = 26.15\%$ (উত্তর)

৮. পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{4(10 - 40)^2 + 6(20 - 40)^2 + 10(30 - 40)^2 + 25(40 - 40)^2 + 10(50 - 40)^2 + 6(60 - 40)^2 + 4(70 - 40)^2}{65}}$

$= \sqrt{\frac{4 \times 900 + 6 \times 400 + 10 \times 100 + 25 \times 0 + 10 \times 100 + 6 \times 400 + 4 \times 900}{65}}$

$= \sqrt{\frac{3600 + 2400 + 1000 + 0 + 1000 + 2400 + 3600}{65}}$

$= \sqrt{\frac{14000}{65}} = 14.67$ (উত্তর)

৯. ভেদাক্ষ $= \sigma^2 = (14.67)^2 = 215.2089$ (উত্তর)

১০. বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{14.67}{40} \times 100 = 36.68\%$ (উত্তর)

***শ্রেণিব্যবধান থাকলে শ্রেণির মধ্যবিন্দু বের করে তা নিয়ে কাজ করতে হবে।

নিচের তথ্য ছক হতে ভেদাঙ্ক বের করঃ

পরিবারের মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা
5 – 10	3
10 – 15	5
15 – 20	10
20 – 25	8
25 – 30	2

সমাধানঃ প্রদত্ত তথ্য সারি ব্যবহার করে পাই,

মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$
5 – 10	3	7.5	22.5
10 – 15	5	12.5	62.5
15 – 20	10	17.5	175
20 – 25	8	22.5	180
25 – 30	2	27.5	55
	$N = \sum f_i = 28$		$\sum f_i x_i = 495$

∴ গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{495}{28} = 17.68$

∴ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{3(7.5 - 17.68)^2 + 5(12.5 - 17.68)^2 + 10(17.5 - 17.68)^2 + 8(22.5 - 17.68)^2 + 2(27.5 - 17.68)^2}{28}}$$

$$= \sqrt{\frac{824.11}{28}} = 5.43$$

∴ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = 29.43$ (উত্তর)

***শ্রেণিব্যবধান থাকলে শ্রেণির মধ্যবিন্দু বের করে তা নিয়ে কাজ করতে হবে।

নিচের তথ্য ছক হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ

মাসিক আয়(টাকা)	পরিবারের সংখ্যা
1001 – 2000	8
2001 – 3000	30
3001 – 4000	75
4001 – 5000	25
5001 – 6000	18
6001 – 7000	14

সমাধানঃ প্রদত্ত তথ্য সারি ব্যবহার করে পাই,

মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$
1001 – 2000	8	1500.5	12004.0
2001 – 3000	30	2500.5	75015.0
3001 – 4000	75	3500.5	262537.5
4001 – 5000	25	4500.5	112512.5
5001 – 6000	18	5500.5	99009.0
6001 – 7000	14	6500.5	91007.0
	$N = \sum f_i = 170$		$\sum f_i x_i = 652085$

$$\therefore \text{গড়, } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{652085}{170} = 3835.79$$

$$\therefore \text{পরিমিত ব্যবধান, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \times 5453579.38 + 30 \times 1782999.38 + 75 \times 112419.38 + 25 \times 441839.38 + 18 \times 2771259.38 + 14 \times 7100679.38}{170}}$$

$$= \sqrt{\frac{265888234.6}{170}} = 1250.62 \quad (\text{উত্তর})$$

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক, পরিসরাঙ্ক, চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

শ্রেণি	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52
গণসংখ্যা	3	6	11	15	19	14	12	9	5	2

সমাধানঃ প্রদত্ত নিবেশন ব্যবহার করে পাই,

শ্রেণি	গণসংখ্যা (f_i)	ক্রমযোজিত গণ সংখ্যা	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
7 – 12	3	3	9.5	28.5	270.75
12 – 17	6	9	14.5	87.0	1261.50
17 – 22	11	20	19.5	214.5	4182.75
22 – 27	15	35	24.5	367.5	9003.75
27 – 32	19	54	29.5	560.5	16534.75
32 – 37	14	68	34.5	483.5	16663.75
37 – 42	12	80	39.5	474.5	18723.00
42 – 47	9	89	44.5	400.5	17822.25
47 – 52	5	94	49.5	247.5	12251.25
52 – 57	2	96	54.5	109.0	5940.50
	$N = \sum f_i$ = 96			$\sum f_i x_i =$ 2972	$\sum f_i x_i^2 =$ 102654

১. পরিসর, $R = 57 - 7 = 50$ (উত্তর)

২. পরিসরাক্ষ, $CR = \frac{57-7}{57+7} \times 100 = \frac{50}{64} \times 100 = 78.125\%$ (উত্তর)

৩. চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $\frac{N \times 1}{4} = 24$ অতএব প্রথম চতুর্থক শ্রেণি 22 – 27 শ্রেণিতে অবস্থিত

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{N \times 1}{4} - f_c}{f_a} \times C = L_0 + \frac{\frac{N \times 1}{4} - f_c}{f_a} \times C = 22 + \frac{\frac{96 \times 1}{4} - 20}{15} \times 5 = 23.33$$

এখানে, $\frac{N \times 3}{4} = 72$ অতএব তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণি 37 – 42 শ্রেণিতে অবস্থিত

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{N \times 3}{4} - f_c}{f_a} \times C = L_0 + \frac{\frac{N \times 3}{4} - f_c}{f_a} \times C = 37 + \frac{\frac{96 \times 3}{4} - 68}{12} \times 5 = 38.67$$

∴ চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{38.67 - 23.33}{2} = 7.67$ (উত্তর)

৪. চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $CQD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$
 $= 24.74\%$ (উত্তর)

৫. গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2972}{96} = 30.96$

৬. গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$ (উত্তর)

৭. গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD_{\bar{x}} = \frac{MD_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10.46}{40} \times 100 = 26.15\%$ (উত্তর)

৮. পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$
 $= \sqrt{\frac{102654}{96} - 958.52} = \sqrt{110.79} = 10.53$ (উত্তর)

৯. ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{102654}{96} - 958.52 = 1069.31 - 958.52 = 110.79$ (উত্তর)

১০. বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10.53}{30.96} \times 100 = 34.01\%$ (উত্তর)

দুটি অসম রাশির গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 6 ও 9 হলে রাশি দুটি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনেকরি, রাশি দুটি যথাক্রমে x_1 ও x_2 ; যেখানে $x_1 > x_2$

তাহলে, গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 6$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 12 \dots \dots \dots$ (i)

আবার, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{9} = 3$

কিন্তু আমরা জানি, দুটি অসমান তথ্যমানের পরিমিত ব্যবধান পরিসরের অর্ধেক।

∴ $\frac{x_1 - x_2}{2} = 3$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 6 \dots \dots \dots$ (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2x_1 = 18$

$\Rightarrow x_1 = 9 \therefore$ (i) $\Rightarrow x_2 = 3$

অর্থাৎ রাশি দুটি যথাক্রমে 9 ও 3। (উত্তর)