উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
একাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-৬ঃ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

Chapter—6A

- ত্রিকোণমিতি গ্রিক শব্দ যার অর্থ ত্রিভুজের পরিমাপ ।
- Trigonometry শব্দটি Trigon(ত্রিভুজ) এবং metry(পরিমাপ) শব্দ দুটির সমন্বয়ে গঠিত ।
- ত্রিকোনমিতি হল গণিতের এমন একটি শাখা যেখানে ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কোণের সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করা হয় ।
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হল ত্রিকোনমিতিক ফাংশন ।
- ত্রিকোণমিতি দুটি শাখায় বিভক্ত – –সমতলীয় ত্রিকোনমিতি এবং গোলকীয় ত্রিকোণমিতি ।
- দুটি অসমান্তরাল সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদ বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয় ।
- ত্রিকোণমিতিতে কোণ উৎপন্ন হয় একটি রশ্মির ঘূর্ণণের ফলে ।
- একটি রশ্মি তার আদি অবস্থান থেকে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌছাতে যে পরিমাণে আবর্তিত হয় ,তা ঐ রশ্মির দ্বারা উৎপন্ন কোণের পরিমাণ নির্দেশ করে ।
- ধনাত্মক কোণ : কোন রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক কোণ বলে ।
- ঋণাত্মক কোণ : কোন রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক কোণ বলে ।
- ঘূর্ণায়মান রেখাংশের শেষ অবস্থানকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ রেখা বলে ।
- সমপ্রান্তিক কোণ : দুই বা ততোধিক কোণের একই প্রান্তিক রেখা থাকলে তাদেরকে সমপ্রান্তিক কোণ বলে ।
- কোণের পরিমাণ যাই হোক না কেন ,সেটি যে কোন একটি চতুর্ভাগের মধ্যে থাকবে ।

❖ ত্রিকোণমিতিতে কোণ পরিমাপের জন্য তিনটি পদ্ধতি আছে। যেমন ঃ

(১) ষাটমূলক পদ্ধতি (২) শতমূলক পদ্ধতি এবং (৩) বৃত্তীয় পদ্ধতি।

➢ ষাটমূলক পদ্ধতি ঃ এ পদ্ধতিতে 1 সমকোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করা হয় যার প্রতি ভাগকে 1 ডিগ্রি বলা হয়।
  - 1 ডিগ্রির 60 ভাগের এক ভাগকে 1 মিনিট এবং 1 মিনিটের 60 ভাগের 1 ভাগকে 1 সেকেন্ড বলা হয়। অর্থাৎ 1 সমকোণ $= 90^0, 1^0 = 60', 1' = 60''$।

➢ শতমূলক পদ্ধতি ঃ এ পদ্ধতিতে 1 সমকোণকে 100 ভাগে ভাগ করা হয় যার প্রতি ভাগকে 1 গ্রেড বলা হয়। 1 গ্রেডের 100 ভাগের এক ভাগকে 1 মিনিট(শতমূলক মিনিট) এবং 1 মিনিটের 100 ভাগের 1 ভাগকে 1 সেকেন্ড (শতমূলক সেকেন্ড) বলা হয়। অর্থাৎ 1 সমকোণ $= 100^g, 1^g = 100', 1' = 100''$।
  - বর্তমানে এ পদ্ধতির প্রচলন নেই ।

➢ বৃত্তীয় পদ্ধতি ঃ কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে 1 রেডিয়ান বলে।
  - এক 1 রেডিয়ান বা 1^c লেখা হয় ।

- রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।
- 1 ে রডিয়ান $=\frac{2}{\pi}\times 1$ সমে কাণ $=\frac{2}{\pi}$ সমে কাণ
- রেডিয়ানের সংজ্ঞা বৃত্তের সাথে সম্পর্কিত বলে ইহাকে বৃত্তীয় পদ্ধতি বলে।

❖ ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতির সম্পর্কঃ π রেডিয়ান $= 180^0$ বা, 2 সমকোণ;

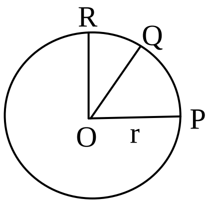
$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রি বা, } \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান।}$$

- বৃত্তের কোন চাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ উক্ত চাপটির সমানুপাতিক।

$\angle POQ \propto$ চাপ PQ

$\angle POR \propto$ চাপ PR



- বৃত্ত চাপের দৈর্ঘ্য ,s = rθ[এই অধ্যায়ের সকল অংকে θ কে রেডিয়ানে হিসাব করতে হবে ।]
- বৃত্ত কলার ক্ষেত্রফল, A $=\frac{1}{2}r^2\theta$, এখানে r হচ্ছে বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং θ হচ্ছে বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ।
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}a\times b\times sin\theta$ [যদি কোণ দেয়া থাকে তাহলে এটি ব্যবহার করতে হবে ।]
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$
- সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ [এখানে a হচ্ছে সমান সমান বাহু আর b হচ্ছে ভুমি]
- সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
- কোণকের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

❖ $34^0 37' 45''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

---- আমরা পাই, $34^0 37' 45'' = \left(34+\frac{37}{60}+\frac{45}{60\times 60}\right)^0$

$$= \left(34+\frac{37}{60}+\frac{1}{80}\right)^0$$

$$= \left(\frac{8160+148+3}{240}\right)^0$$

$$= \left(\frac{8311}{240}\right)^0$$

$$= \left(\frac{8311}{240}\times\frac{\pi}{180}\right) \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0.622 \text{ রেডিয়ান} \quad [\because \pi = 3.14159]$$

❖ ষাটমূলক এককে প্রকাশ করঃ $\frac{47\pi}{12}$ রেডিয়ান।

----আমরা পাই, $\frac{47\pi}{12}$ রেডিয়ান $=\left(\frac{47\pi}{12}\times\frac{180}{\pi}\right)$ ডিগ্রি $=(47\times 15)$ ডিগ্রি $= 705$ ডিগ্রি।

❖ ষাটমূলক এককে প্রকাশ করঃ $\frac{5\pi}{16}$ রেডিয়ান।

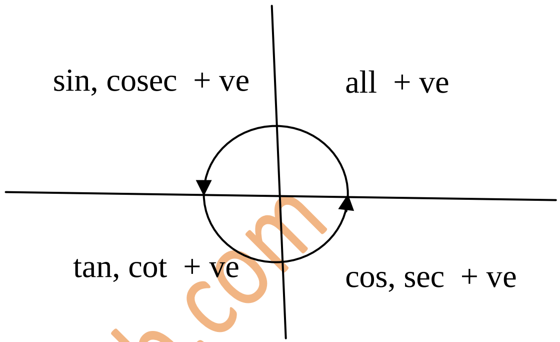
----আমরা পাই, $\frac{5\pi}{16}$ রেডিয়ান $= \left(\frac{5\pi}{16} \times \frac{180}{\pi}\right)$ ডিগ্রি

$= \left(\frac{45\times5}{4}\right)$ ডিগ্রি

$= \frac{225}{4}$ ডিগ্রি $= 56^0 15'$

Chapter—6B

❖ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন ঃ



❖ $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঃ

$sin(-\theta) = -sin\theta;\ \cos(-\theta) = cos\theta;\ \tan(-\theta) = -tan\theta$

$cosec(-\theta) = -cosec\theta;\ \sec(-\theta) = sec\theta;\ \cot(-\theta) = -cot\theta$

❖ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও চিহ্ন পরিবর্তন ঃ

$90°$ এর গুণিতক বিজোড় হলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন হয়। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন নিম্নরূপঃ

যেমন : $cos390°$

$= \cos(4 \times 90° + 30°) = cos30°$

এখানে $90°$এর গুণিতক জোড় তাই cos এর পরিবর্তন হয়নি ।

$sin \longleftrightarrow cos$

$tan \longleftrightarrow cot$

$sec \longleftrightarrow cosec$

যেমন : $cos438°$

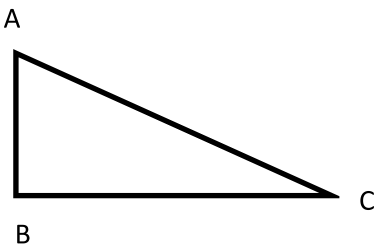
$= \cos(5 \times 90° - 12°) = sin12°$

এখানে $90°$এর গুণিতক বিজোড় তাই cos পরিবর্তিত হয়ে sin হয়েছে।

❖ $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$(csc θ হচ্ছে বিপরীত)

❖ $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$ (sec θ হচ্ছে বিপরীত)

❖ $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ (cot θ হচ্ছে বিপরীত)



এখানে,AB = লম্ব
BC = ভুমি
AC = আতিভুজ

***ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান :

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

***$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

- $\boldsymbol{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta}$
- $\boldsymbol{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta}$

*** $\boldsymbol{\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1}$

- $\boldsymbol{\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta}$
- $\boldsymbol{\csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta}$

***$\boldsymbol{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$

- $\boldsymbol{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$
- $\boldsymbol{\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta}$

*** $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ *** $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ *** $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ *** $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

*** $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ *** $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ *** $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$*** $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

❖ পর্যায়ী ফাংশন এবং পর্যায়কাল : f(x) ফাংশন কে পর্যায়ী বলা হয় যদি f(x + T) = f(x) হয় এবং T এর সর্বনিম্ন যে মানের জন্য সম্পর্কটি সত্য হয় তাকে ফাংশনটির পর্যায়কাল বলে ।

- sinx,cosx,secx,cscx ফাংশনগুলো পর্যায়ী এবং এদের পর্যায়কাল 2π ।
- tanx,cotx ফাংশনগুলো পর্যায়ী এবং এদের পর্যায়কাল π ।

❖ বৃত্তিয় ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ:

- θ এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় ,কাজেই ফাংশনদ্বয়ের প্রত্যেকের ডোমেন = R ।
- $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধির যে কোন কোণের জন্য $-1 \le sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le cos\theta \le 1$ তাই $sin\theta$ এবং $cos\theta$ প্রত্যেক ফাংশনের রেঞ্জ [-1,1] ।
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\cos\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হয় । সুতরাং $\tan\theta$এর ডোমেন = $R - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R
- $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\sin\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = n\pi$ হয় । সুতরাং $\cot\theta$এর ডোমেন = $R - n\pi$, যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R

- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\cos\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হয় । সুতরাং $\tan\theta$এর ডোমেন = $R - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R- (-1,1)
- $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\sin\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = n\pi$ হয় । সুতরাং $\csc\theta$এর ডোমেন = $R - n\pi$, যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R – (-1,1)

❖ $y = sinx$ ফাংশনের লেখচিত্র ,যেখানে $-2\pi \le x \le 2\pi$ ।

বৈশিষ্ট্যঃ (১) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঢেউ আকৃতির ।

(২) লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, $sinx$ এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1

(৩) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী ।

❖ $y = cosx$ ফাংশনের লেখচিত্র , যেখানে $-\pi \le x \le \pi$ ।

বৈশিষ্ট্যঃ (১) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঢেউ আকৃতির ।

(২) লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, $cosx$ এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1

(৩) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয় ।

(৪) লেখচিত্রটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ।