উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
দ্বাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-১০ঃ বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাব্যতা

বিস্তার পরিমাপ

- উপাত্তের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ঃ কোন উপাত্তের মানগুলোর কেন্দ্রের দিকে ঝুকে থাকার প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। যেমনঃ গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক।
- বিস্তার : বিস্তার বলতে সংখ্যাগুলোর মধ্যে ভেদ বা ব্যবধানকে বুঝায় ।
  ---কোন নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধানই হচ্ছে বিস্তার।
  ------আবার নিবেশনের মানগুলোর পারস্পরিক ব্যবধানও বিস্তার।
- বিস্তার পরিমাপ ঃ মধ্যক মান থেকে অন্যান্য সংখ্যাগুলো কত ছোট বা বড় তার পরিমাপকে বলা হয় বিস্তার পরিমাপ ।
  -কোন নিবেশনের উপাত্তের মানগুলোর সাথে কেন্দ্রীয় মানের বিস্তৃতির মাত্রার বা মানগুলোর পারস্পরিক বিস্তৃতির মাত্রার সংখ্যাসূচক পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলে।
  --সংখ্যাগুলোর মধ্যে ব্যাবধান যতই বাড়তে থাকবে তাদেও বিস্তারও ততই বাড়তে থাকবে ।
  ---বিস্তার হচ্ছে রাশিমালার বিক্ষিপ্ততার মাত্রা ।
  ----কোনো নিবেশনের সংখ্যাগুলো সমান হলে নিবেশনটির বিস্তার শূন্য হবে ।
  -----যে তথ্যসারির বিস্তার যত বেশি তার মান গুলো তত বেশি অসামঞ্জস্যপূর্ণ ।
  ------যে তথ্যসারির বিস্তার যত কম তার মধ্যক মান তত বেশি প্রতিনিধিত্বকারী হয়।
  -------সম্পদ বন্টনের অসমতা পরিমাপে এটি ব্যবহৃত হয় ।
  --------কোনো কারখানার উৎপাদিত পণ্যের গুণগতমান যাচাইয়ে এটি ব্যবহৃত হয় ।

- বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ ঃ বিস্তার পরিমাপ দু'ধরণেরঃ (ক) পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ
  (খ) আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ।
- অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ ঃ কোন নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মান সমূহের ব্যবধানের গড় যা নিবেশনের মান সমূহের মূল এককে প্রকাশিত হয়, তাকে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ বলে। এটি চার ধরণেরঃ

  (১) পরিসর, (২) গড় ব্যবধান, (৩) পরিমিত ব্যবধান ও (৪) চতুর্থক ব্যবধান।

এগুলোর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা নিচে প্রদত্ত হলোঃ

- ➢ পরিসর ঃ পরিসর হচ্ছে বিস্তার পরিমাপের সর্বাপেক্ষা সহজ পদ্ধতি।
  - ইহাকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  -- অশ্রেণিকৃত উপাত্তের সবচেয়ে বড় মান থেকে সবচেয়ে ছোট মানের ব্যবধানই হচ্ছে পরিসর।
  পরিসর (R) = বৃহত্তম সংখ্যা - ক্ষুদ্রতম সংখ্যা
  ---শ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার পার্থক্যকে পরিসর বলে।
  পরিসর (R) = সর্বোচ্চ শ্রেণির উর্ধ্বসীমা - সর্বনিম্ন শ্রেণির নিম্নসীমা

- ➢ গড় ব্যবধান ঃ কোন নিবেশনের মধ্যক মান থেকে সংখ্যাগুলির ব্যাবধানের পরমমানের সমষ্টিকে মোট উপাত্ত সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে গড় ব্যবধান বলে।
  - ইহাকে MD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- ➢ গড় ব্যবধান বের করার সূত্রঃ

গড় ব্যবধান	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে
গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$MD_{\bar{x}} = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N}$	$MD_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N}$
মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$MD_{m_e} = \frac{\sum \lvert x_i - M_e \rvert}{N}$	$MD_{m_e} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - M_e \rvert}{N}$
প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$MD_{m_o} = \frac{\sum \lvert x_i - M_o \rvert}{N}$	$MD_{m_o} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - M_o \rvert}{N}$

এখানে, N গণসংখ্যা নির্দেশ করে।

-এটি নমুনা তারতম্য দ্বারা বেশি প্রভাবিত হয় ।

--এটি তথ্য সারির সকল মানের উপর নির্ভরশীল ।

---এটি পরিমিত ব্যাবধানের তুলনায় কম নির্ভরশীল ।

----পরিমিত ব্যাবধানের নির্ভুলতা যাচাইয়ে এটি ব্যবহৃত হয় ।

-----অশ্রেণিকৃত ছোট তথ্যসারির ক্ষেত্রে এটি বেশি ব্যবহৃত হয় ।

- পরিমিত ব্যবধান ঃ বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও সঠিক পরিমাপক হচ্ছে পরিমিত ব্যবধান।
  - কোন উপাত্তের মানগুলো থেকে তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তার ধনাত্বক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে।
  -- ইহাকে σ বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  ---এটি তথ্য সারির সকল মানের উপর নির্ভরশীল ।
  ----এটি নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা কম প্রভাবিত হয় ।
  -----এটি প্রান্তিক বা চরম মান দ্বারা খুব বেশি প্রভাবিত হয় ।
  ------প্রতিযোগিতামূলক খেলায় দল বা খেলোয়াড়ের ভালমন্দ বিশ্লেষণে এবং খেলার ফলাফল সম্পর্কে আগাম পূর্বাভাস প্রদানে এটি ব্যবহৃত হয় ।
  -------বিভিন্ন সংখ্যাত্মক গবেষণায় ও পরিকল্পনা প্রণয়নে এটি ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয় ।

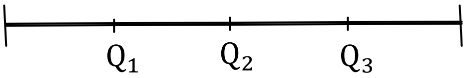
পরিমিত ব্যবধান বের করার সূত্র ঃ

সূত্র	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে
তাত্ত্বিক সূত্র	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$
গণনার সূত্র	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{n}\right)^2}$

- ভেদাংক : কোন উপাত্তের মান গুলো থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে ভেদাংক বলে। অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধানের বর্গকে ভেদাংক বলে।
  - ইহাকে σ^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

  --ভেদাঙ্ক কখনো ঋণাত্মক হতে পারেনা ।
- চতুর্থক ব্যবধান ঃ উপাত্তের মানগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মানগুলি উপাত্তের মানকে সমান চার ভাগে ভাগ করে তাদেরকে চতুর্থক বলে।

  - একটি উপাত্তে তিনটি চতুর্থক থাকে। ১ম চতুর্থক(Q_1), ২য় চতুর্থক(Q_2) ও ৩য় চতুর্থক(Q_3)।



--কোন উপাত্তের ৩য় চতুর্থক থেকে ২য় চতুর্থক এবং ২য় চতুর্থক থেকে ১ম চতুর্থকের ব্যবধানের সমষ্টিকে দুই দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায়, তাকে চতুর্থক ব্যবধান বলে।

---চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)}{2} = \frac{Q_3-Q_1}{2}$

----এটি তথ্য সারির সকল মানের উপর নির্ভরশীল নয়।

-----এটি প্রান্তিক বা চরম মান দ্বারা প্রভাবিত হয়না ।

------লেখচিত্রের সাহায্যে এটি নির্ণয় করা যায় ।

-------এটি নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা খুব বেশি প্রভাবিত হয় ।

--------এটি নির্ণয়ে তথ্যসারির ১ম ও শেষ ২৫% মান হিসেবে আনা হয় না ।

--------- এটি তথ্য সারির সকল মানের উপর নির্ভরশীল নয় বলে এর সাহায্যে অনেক সময় প্রতিনিধিত্বকারী ফলাফল পাওয়া যায় না।

- i তম চতুর্থক নির্ণয় করার সূত্র ঃ

-অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ঃ $Q_i = \frac{\left(\frac{N\times i}{4}\right) \text{ তম পদ} + \left(\frac{N\times i}{4}+1\right) \text{ তম পদ}}{2}$; যখন N জোড়

$Q_i = \frac{(N+1)\times i}{4}$ তম পদ ; যখন N বিজোড়

--শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ঃ $Q_i = L_i + \frac{\frac{N\times i}{4} - f_c}{f_a} \times C$

যেখানে, L_i = i -তম চতুর্থক শ্রেণির নিম্নসীমা।

f_c = i -তম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ব শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

f_a = i -তম চতুর্থক শ্রেণির গণসংখ্যা।

C = চতুর্থক শ্রেণির ব্যবধান।

N = গণসংখ্যা।

- আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ঃ কোন নিবেশনের পরম বিস্তার পরিমাপ এবং তার সাথে সম্পর্কিত কেন্দ্রীয় মান বা মান সমূহের যোগফলের অনুপাতকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে।
  - এটি একক বিহীন সংখ্যা।
  --আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকারের। যথাঃ পরিসরাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক, বিভেদাঙ্ক ও চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক।

এগুলোর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা নিচে প্রদত্ত হলো ঃ

➢ পরিসরাঙ্ক ঃ কোন উপাত্তের পরিসরকে তার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে পরিসরাঙ্ক বলে।

-ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

--অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ঃ বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসরাঙ্ক, $\mathrm{CR} = \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \times 100$

---শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রেঃ সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা L_1 এবং সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_n হলে

পরিসরাঙ্ক(Coefficient of Range), $\mathrm{CR} = \frac{\mathrm{L}_n - \mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_n + \mathrm{L}_1} \times 100$

➢ গড় ব্যবধানাঙ্কঃ কোন নিবেশনের গড় ব্যবধান এবং তার সাথে সংশ্লিষ্ট কেন্দ্রীয় মানের অনুপাতকে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে।
- ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

-- গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD}_{\bar{x}} = \frac{\mathrm{MD}_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100$

---মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD}_{\mathrm{me}} = \frac{\mathrm{MD}_{\mathrm{me}}}{\mathrm{Me}} \times 100$

----প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD}_{\mathrm{mo}} = \frac{\mathrm{MD}_{\mathrm{mo}}}{\mathrm{Mo}} \times 100$

➢ বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্কঃ কোন উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক বলে।
- ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।
-- গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে $\bar{x}$ ও σ হলে বিভেদাঙ্ক, $\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

➢ চতুর্থক ব্যবধানাঙ্কঃ কোন উপাত্তের তৃতীয় ও প্রথম চতুর্থকের পার্থক্যকে উহাদের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক বলে।
-ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।
--প্রথম চতুর্থক Q_1 ও তৃতীয় চতুর্থক Q_3 হলে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CQD} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$