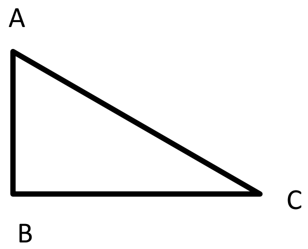
# উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
# দ্বাদশ শ্রেণি
## অধ্যায়-৭ঃ ত্রিকোণমিতি
## বিপরীত বৃত্তিয় ফাংশন

- Sin$\theta$,cos$\theta$,tan$\theta$ প্রভৃতি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে ।
- যদি sin$\theta$ = x হয়,তাহলে $\theta$ একটি কোণ যার sin এর মান x । সুতরাং $\theta = \sin^{-1} x$ ,এখানে $\theta = \sin^{-1} x$ সমীকরণটি sin $\theta$ = x এর বিপরীত সম্পর্ক নির্দেশ করে বলে $\theta = \sin^{-1} x$ কে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে ।
- sinx একটি অনুপাত আর $\sin^{-1} x$ একটি কোণ।
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোর বিপরীত অন্বয়গুলিকে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে ।তবে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন থেকে সব সময় বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন পাওয়া যায় না ।
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন xy<1
- $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$
- $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$
- $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$
- $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$
- $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

  *******$2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$**

- ❖ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন xy>1
- ❖ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ যখন xy =1

- ❖ $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$(csc $\theta$ হচ্ছে বিপরীত)
- ❖ $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$ (sec $\theta$ হচ্ছে বিপরীত)
- ❖ $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ (cot $\theta$ হচ্ছে বিপরীত )




এখানে,AB = লম্ব
BC = ভুমি
AC = আতিভুজ

- ❖ মুখ্যমান : বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক মানকে এর মুখ্যমান বলে ।
- ❖ যেমন: $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান হলো $30^0$
- ❖ মুখ্যমান নির্ণয়ের পদ্ধতি :

  ধরি, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\theta = 30^0, 150^0, 390^0$

এই তিনটি মানের মধ্যে ক্ষুদ্রতম মান হলো $30^0$ । তাই এটি $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান ।

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্য মানের সীমা :$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$ ,$0 \le \cos^{-1}x \le \pi$ ,$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \cot^{-1}x < \pi$ , $0 < \csc^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$ অথবা, $\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}x < \pi$ $0 < \sec^{-1}x < \frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}x < \pi$

❖ বিপরীত বৃত্তিয় ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ : মুখ্য মানের সীমা অবশ্যই মনে রাখতে হবে।

| বিপরীত বৃত্তিয় ফাংশন | ডোমেন | রেঞ্জ |
|---|---|---|
| $\sin^{-1}x$ | [-1,1] | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| $\cos^{-1}x$ | [-1,1] | $[0, \pi]$ |
| $\tan^{-1}x$ | R অথবা (-∞, ∞) | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ |
| $\cot^{-1}x$ | R অথবা (-∞, ∞) | $(0, \pi)$ |
| $\csc^{-1}x$ | R-(-1,1) | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ |
| $\sec^{-1}x$ | R-(-1,1) | $[0, \pi]$ -$\{\frac{\pi}{2}\}$ |

❖ বৃত্তিয় ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ :

- $\theta$ এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় ,কাজেই ফাংশনদ্বয়ের প্রত্যেকের ডোমেন = R।
- $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধির যে কোন কোণের জন্য $-1 \le sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le cos\theta \le 1$ তাই $sin\theta$ এবং $cos\theta$ প্রত্যেক ফাংশনের রেঞ্জ [-1,1] ।
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\cos\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হয় । সুতরাং $\tan\theta$এর ডোমেন $= R - (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R
- $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\sin\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = n\pi$ হয় । সুতরাং $\cot\theta$এর ডোমেন $= R - n\pi$ , যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R
- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\cos\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হয় । সুতরাং $\tan\theta$এর ডোমেন $= R - (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R- (-1,1)
- $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ কাজেই অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $\sin\theta = 0$অর্থাৎ $\theta = n\pi$ হয় । সুতরাং $\csc\theta$এর ডোমেন $= R - n\pi$ , যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং রেঞ্জ = R – ( -1,1)

❖ $y = \sin^{-1}x$ ফাংশনের লেখচিত্র , [-1,1] ব্যবধিতে।

বৈশিষ্ট্যঃ (১) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঢেউ আকৃতির।

(২) লেখটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ।

(৩) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী।

❖ $y = \cos^{-1} x$ ফাংশনের লেখচিত্র , [-1,1] ব্যবধিতে ।

বৈশিষ্ট্যঃ (১) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

(২) লেখচিত্রটি ঢেউ আকৃতির।

(৩) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।

(৪) লেখচিত্রটি $x$ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ।

❖ $y = \tan^{-1} x$ ফাংশনের লেখচিত্র , [-1,1] ব্যবধিতে ।

বৈশিষ্ট্যঃ (১) লেখচিত্রটি ১ম এবং ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত ।

(২) লেখচিত্রটি ঢেউ আকৃতির।

(৩) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী ।

***$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

- $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
- $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

*** $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

- $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
- $\csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

***$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
- $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$