উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
দ্বাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-১ঃ বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

- **বাস্তব সংখ্যা :** শূন্য সহ সকল ধনাত্নক এবং ঋণাত্নক সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলে। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

  $R = \{ \ldots. -5, -3, -2, -\sqrt{3}, 0, 1, \frac{3}{2}\ \sqrt{3}, 2, e, 3, \pi, 5, 6, \ldots\ldots\ldots. \}$
  - **বাস্তব সংখ্যার কোন উর্ধ্বসীমা এবং নিম্নসীমা নেই ।**
- **স্বাভাবিক সংখ্যা :** $N = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots. \}$
  - **স্বাভাবিক সংখ্যার উর্ধ্বসীমা নেই কিন্তু নিম্নসীমা আছে এবং Inf = 1**
- **পূর্ণ সংখ্যা :** $Z = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots. \}$
  - **পূর্ণ সংখ্যার কোন উর্ধ্বসীমা এবং নিম্নসীমা নেই ।**

- **বাস্তব সংখ্যার পরমমান ঃ** কোন বাস্তব সংখ্যা **X** এর পরমমানকে |X| দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বাস্তব সংখ্যার পরমমান সর্বদা ধনাত্নক বা শূন্য। সুতরাং

$$|X| = \begin{cases} X \text{ যখন } X > 0 \\ 0 \text{ যখন } X = 0 \\ -X \text{ যখন } X < 0 \end{cases}$$

জ্যামিতিক ভাবে |X| দ্বারা বাস্তব সংখ্যারেখায় 0 থেকে X এর দূরত্বকে বুঝানো হয়।

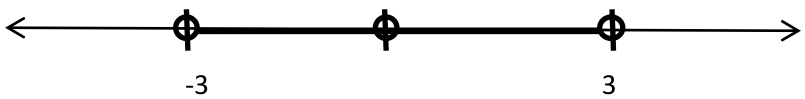
******** $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$ **********

- **ব্যবধি---**

মনেকরি, a ও b দুটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা। এখন, a ও b কে অন্তর্ভূক্ত রেখে বা না রেখে এদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে যে সেট গঠিত হয়, তাকে ব্যবধি বলে।

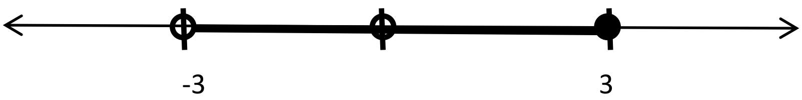
- ব্যবধি চার রকমের- (১) খোলা ব্যবধি (২) অর্ধ খোলা এবং অর্ধ বদ্ধ (৩) অর্ধ বদ্ধ এবং অর্ধ খোলা (২) বদ্ধ ব্যবধি।
- বিভিন্ন ব্যবধির উদাহরণ ---

✓ **<u>খোলা ব্যবধি</u>** : ব্যবধি আকারে : $-3 < x < 3$ সেট আকারে :]-3,3[অথবা (-3,3)



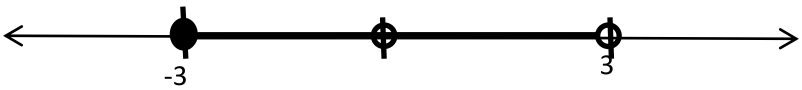
বি.দ্রঃ -3 হতে বড় এবং 3 হতে ছোট তাই -3এবং 3 কে স্পর্শ করবেনা ।

✓ **অর্ধ খোলা এবং অর্ধ বদ্ধ ব্যবধি :** ব্যবধি আকারে : $-3 < x \leq 3$ সেট আকারে :]-3,3] অথবা (-3,3]



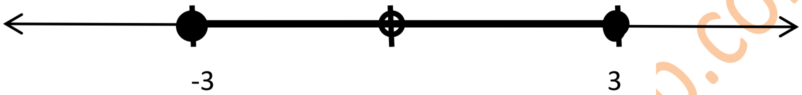
বি.দ্রঃ -3 হতে বড় এবং 3 পর্যন্ত তাই -3 স্পর্শ করবেনা কিন্তু 3কে স্পর্শ করবে ।

✓ **অর্ধ বদ্ধ এবং অর্ধ খোলা ব্যবধি :** ব্যবধি আকারে : $-3 \leq x < 3$ সেট আকারে : [-3,3[অথবা [-3,3)



বি.দ্রঃ -3 থেকে শুরু এবং 3 থেকে ছোট তাই -3 স্পর্শ করবে কিন্তু 3 কে স্পর্শ করবেনা ।

✓ **বদ্ধ ব্যবধি:** ব্যবধি আকারে: $-3 \leq x \leq 3$ সেট আকারে : [-3,3]



বি.দ্রঃ -3 থেকে শুরু এবং 3 পর্যন্ত ছোট তাই -3 এবং 3 উভয়কে স্পর্শ করবে ।

❖ **উদাহরণ : x একটি পূর্ণসংখ্যা হলে,**

- $x \in [-3,5] = \{-3 \leq x \leq 5\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
- $x \in (-3,5] = \{-3 < x \leq 5\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
- $x \in [-3,5[= \{-3 \leq x < 5\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$
- $x \in]-3,5[= \{-3 < x < 5\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

❖ **বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন স্বীকার্য:**

- আবদ্ধতা বিধি ঃ a,b যে কোন বাস্তব সংখ্যা হলে $a + b$ এবং ab বাস্তব হবে।
- **সংযোজন বিধি ঃ a,b,c যে কোন তিনটি বাস্তব সংখ্যা হলে, $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং $(ab)c = a(bc)$ হবে।**
- **অনন্যতা বিধি ঃ a,b,c,d যে কোন বাস্তব সংখ্যা এবং $a = b$, $c = d$ হলে, $a + c = b + d$ এবং $ac = bd$ হবে।**
- অভেদকের অস্তিত্ব ঃ বাস্তব সংখ্যার সেট R এ একটি অনন্য উপাদান 0 বিদ্যমান যেন প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য $a + 0 = 0 + a = a$ হয়। আবার বাস্তব সংখ্যার সেট R এ একটি অনন্য উপাদান 1 বিদ্যমান যেন প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য $a.1 = 1.a = a$ হয়। (0 কে যোগের অভেদ আর 1 কে গুণের অভেদ বলা হয়)
- বিপরীতের অস্তিত্ব ঃ প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য,বাস্তব সংখ্যার সেট R এ একটি অনন্য উপাদান $-a$ বিদ্যমান যেন $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হয়। আবার প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য, বাস্তব সংখ্যার সেট R এ একটি অনন্য উপাদান a^{-1} বিদ্যমান যেন $a.\, a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ হয়।
- **বিনিময় বিধি ঃ a,b যে কোন বাস্তব সংখ্যা হলে $a + b = b + a$ এবং $ab = ba$ হবে।**
- **বন্টন বিধি ঃ a , b , c যে কোন তিনটি বাস্তব সংখ্যা হলে, $a(b + c) = ab + ac$ এবং $(a + b)c = ac + bc$ হবে।**

- **মূলদ সংখ্যা ঃ**

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, তাদেরকে মুলদ সংখ্যা বলে। যেখানে $p, q \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0$ ।

মূলদ সংখ্যার সেটকে $\mathbf{Q}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিক ভাবে, $\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$ ।

Q = { …. -5 ,-3,-2, 0,1,$\frac{3}{2}$,2,3,5,6,……….}

- **অমূলদ সংখ্যা ঃ**

যে সকল সংখ্যা মূলদ নয় অর্থাৎ $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p,q $\mathcal{E}$ $\mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0$, সে সকল

সংখ্যাকে অমুলদ সংখ্যা বলা হয়। অমূলদ সংখ্যার সেটকে $\mathbb{Q}^c$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন : $\mathbb{Q}^c = \{\sqrt{3}, \pi, e, -\sqrt{3}, 2.51324345 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \}$

- **উর্ধ্বে সীমায়িত সেট (upper bound) ঃ**

একটি বাস্তব সংখ্যার সেট S কে উর্ধ্বে সীমায়িত বলা হবে, যদি এর প্রত্যেকটি উপাদান একটি বাস্তব সংখ্যা M থেকে বড় না হয়।

যেমনঃ S = {1,2,3,4,5} সেটটি উর্ধ্বে সীমায়িত সেট। 4 এর চেয়ে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যাই তার উর্ধ্বসীমা।

S সেটের এরূপ অসংখ্য উর্ধ্ব সীমা রয়েছে। যেমন : 5,6,7,8,……হচ্ছে S এর উর্ধ্বসীমা ।

- **নিম্নে সীমায়িত সেট (lower bound) ঃ**

একটি বাস্তব সংখ্যার সেট S কে নিম্নে সীমায়িত বলা হবে, যদি এর প্রত্যেকটি উপাদান একটি বাস্তব সংখ্যা M থেকে

ছোট না হয়।

যেমনঃ S = {1,2,3,4,5} সেটটি নিম্নে সীমায়িত। 2 এর চেয়ে ছোট যে কোন বাস্তব সংখ্যাই

তার নিম্নসীমা। S সেটের এরূপ অসংখ্য নিম্নসীমা রয়েছে। যেমন : ....-3,-2,-1,০,1 হচ্ছে S এর নিম্নসীমা ।

- **লঘিষ্ঠ উর্ধ্ব সীমা (supremum) ঃ**

একটি উর্ধ্বে সীমায়িত সেটের অসংখ্য উর্ধ্বসীমা থাকে, এর মধ্যে সবচেয়ে ছোটটিকে লঘিষ্ঠ উর্ধ্ব সীমা বা সুপ্রিমাম বলে।

যেমনঃ S = {1,2,3,4,5} সেটটি উর্ধ্বে সীমায়িত সেট। 4 এর চেয়ে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যাই তার উর্ধ্বসীমা।

S সেটের এরূপ অসংখ্য উর্ধ্ব সীমা রয়েছে। যেমন : 5,6,7,8,……হচ্ছে S এর উর্ধ্বসীমা ।

এখন এই উর্ধ্বসীমার মধ্যে সবচেয়ে ছোট হচ্ছে 5 তাই সেটটির লঘিষ্ঠ উর্ধ্ব সীমা বা সুপ্রিমাম হচ্ছে 5।

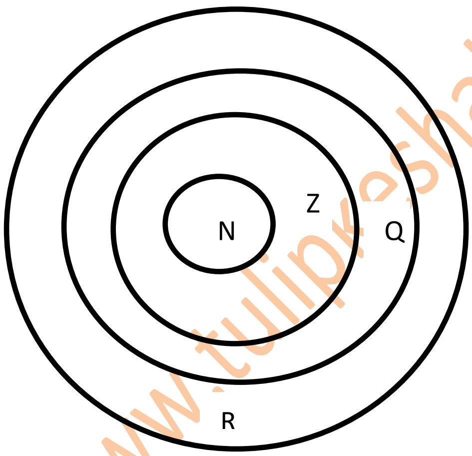
- **গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (Infemum)ঃ**

একটি নিম্নে সীমায়িত সেটের অসংখ্য নিম্নসীমা থাকে, এর মধ্যে সবচেয়ে বড়টিকে গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বা ইনফিমাম বলে। যেমনঃ $S = \{1,2,3,4,5\}$ সেটটি নিম্নে সীমায়িত। 2 এর চেয়ে ছোট যে কোন বাস্তব সংখ্যাই তার নিম্নসীমা।

S সেটের এরূপ অসংখ্য নিম্নসীমা রয়েছে। যেমন : ………-3,-2,-1,০,1 হচ্ছে S এর নিম্নসীমা । এখন এই নিম্নসীমার মধ্যে সবচেয়ে বড় হচ্ছে 1 তাই সেটটির গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বা ইনফিমাম হচ্ছে 1।

  - ➢ যে সকল সেটের উর্ধ্বসীমা এবং নিম্নসীমা উভয়ই আছে তাদেরকে সীমিত সেট বলে ।
- শর্তাধীন অসমতা : $x + 3 > 3$
- শর্তহীন অসমতা : $x + 1 > x$

❖ R,Q,Z,Nএর মধ্যে সম্পর্ক $N \subset Z \subset Q \subset R$



গুরুত্বপূর্ণ আরো কয়েকটি সূত্র:

❖ $(x - 3)(x - 4) < 0$ হলে সমাধান $3 < x < 4$ হবে ।

❖ $(x - 3)(x - 4) > 0$ হলে সমাধান $x < 3$ অথবা $x > 4$ হবে ।

❖ $(x - 3)(x + 4) \leq 0$ হলে সমাধান $3 \leq x \leq - 4$ হবে ।

❖ $(x + 3)(x - 4) \geq 0$ হলে সমাধান $x \leq -3$ অথবা $x \geq 4$ হবে ।