উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
দ্বাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-৫ঃ দ্বিপদী উপপাদ্য

❖ দ্বিপদী রাশিঃ দুই পদ যুক্ত রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলে।

❖ দ্বিপদী উপপাদ্যঃ এটি একটি বীজগণিতীয় সূত্র যার সাহায্যে একটি দ্বিপদী রাশির যে কোন ঘাতকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায়। উপপাদ্য নিম্নরূপঃ

*** $(a-x)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 - \cdots \ldots\ldots\ldots + (-1)^r\ {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots \ldots\ldots\ldots + (-1)^n x^n$

***$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots \ldots\ldots\ldots + x^n$

❖ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ ঃ ${}^nC_r a^{n-r}x^r$ কে বিস্তৃতিটির সাধারণ পদ বলে। ইহাকে বিস্তৃতির (r+1) তম পদ বা x^r যুক্ত পদও বলা হয়।

**** r নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি : $(ax^l + by^m)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^p এর সহগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $r = \frac{ln-p}{l-m}$

❖ দ্বিপদী বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় ঃ

- যদি n জোড় হয়, তবে মধ্যপদ হবে একটি। এ ক্ষেত্রে মধ্যপদটি হবে $\frac{n}{2}+1$ তম পদ।
- যদি n বিজোড় হয়, তবে মধ্যপদ হবে দুটি, যার ১ম টি $\frac{n+1}{2}$ তম এবং ২য়টি $\frac{n+3}{2}$ তম পদ।

❖ প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

যখন n=0 1

যখন n=1 1 1

যখন n=2 1 2 1

যখন n=3 1 3 3 1

যখন n=4 1 4 6 4 1

যখন n=5 1 5 10 10 5 1

যখন n=6 1 6 15 20 15 6 1

❖ যেকোনো সারির পাশাপাশি দুটি সংখ্যার সমষ্টি সংখ্যা দুটির নিচের সারির মাঝের সংখ্যার সমান ।

- প্রয়োজনীয়ঃ n ঋণাতক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হলে এবং $|x| < 1$ হলে,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,!}x^r + \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

নোটঃ এখানে ${}^nC_1,\ {}^nC_2,\ {}^nC_3,\ \ldots\ldots\ldots.$ ইত্যাদি প্রতীক গুলো ব্যবহার করা যাবেনা। কারণ প্রতীকগুলো কেবল n ধনাত্বক হলে ব্যবহৃত হয়।

- সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ

(১) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ = $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,!}x^r$

(২) $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ = $(-1)^r\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r\,!}x^r$

(৩) $(1+x)^{-n}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ = $(-1)^r\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r\,!}x^r$

(৪) $(1-x)^{-n}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ = $\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r\,!}x^r$

- দ্বিপদী বিস্তৃতির বিশেষ সূত্র ঃ যদি $-1 < x < 1$ বা, $|x| < 1$ হয় তবে,

(i) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots\ldots$

(ii) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\ldots$

(iii) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots\cdots\ldots$

(iv) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\ldots$

(v) $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\ldots$

- ধারা: কোনো অনুক্রমের পদগুলিকে পরপর যোগ আকারে প্রকাশ করলে তাকে ধারা বলে । যেমন : u_1 , u_2 , u_3 , u_4, ………., u_n অনুক্রমের পদগুলিকে যোগ আকারে প্রকাশ করলে নিম্মরুপ ধারাটি পাওয়া যায় : $U_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots\ldots + u_n$

- অভিসারি অনুক্রম : যদি অসীম সীমার অনুক্রম U_n এর একটি সসীম মান পাওয়া যায় তখন তাকে অভিসারি অনুক্রম বলে ।

অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ যেখানে l একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা ।

- অপসারি অনুক্রম : যদি অসীম সীমার অনুক্রম U_n এর একটি সসীম মান পাওয়া না যায় তখন তাকে অপসারি অনুক্রম বলে ।
  অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \pm\infty$

  **** একইভাবে অভিসারি এবং অপসারি ধারা ****

❖ অভিসরি এবং অপসারি পরীক্ষা :

- D’Alembert’s Ratio Test :কোনো অসীম ধারার অভিসৃতি প্রমান করার জন্য সাধারণত অনুপাত পরীক্ষা করা হয় ।

অর্থাৎ প্রথমে সাধারণ U_n পদ বের করা হয় । পরে তার থেকে U_{n+1}বের করা হয় ।অতপর: $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ নির্ণয় করতে হয় ।এখন

i. যদি $l < 1$ হয় ,তবে ধারাটি অভিসারি হবে ।

ii. যদি $l > 1$ হয় ,তবে ধারাটি অপসারি হবে ।

iii. যদি $l = 1$ হয় ,তবে পরীক্ষাটি ব্যার্থ হবে । এক্ষেত্রে অন্য পরীক্ষা করতে হবে ।

- Logarithmic Test : প্রথমে সাধারণ U_n পদ বের করা হয় । পরে তার থেকে U_{n+1}বের করা হয়।

অতপর: $\lim_{n\to\infty}(n\log\frac{U_n}{U_{n+1}}) = l$ নির্ণয় করতে হয় ।এখন

i.যদি $l < 1$ হয় ,তবে ধারাটি অভিসারি হবে ।

ii. যদি $l > 1$ হয় ,তবে ধারাটি অপসারি হবে ।

iii. যদি $l = 1$ হয় ,তবে পরীক্ষাটি ব্যার্থ হবে ।এক্ষেত্রে অন্য পরীক্ষা করতে হবে ।

- Raabe’s Test : প্রথমে সাধারণ U_n পদ বের করা হয় । পরে তার থেকে U_{n+1}বের করা হয় । অতপর:

$\lim_{n\to\infty} n(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1) = l$ নির্ণয় করতে হয় ।এখন

i.যদি $l > 1$ হয় ,তবে ধারাটি অভিসারি হবে ।

ii. যদি $l < 1$ হয় ,তবে ধারাটি অপসারি হবে ।

iii. যদি $l = 1$ হয় ,তবে পরীক্ষাটি ব্যার্থ হবে । এক্ষেত্রে অন্য পরীক্ষা করতে হবে ।