উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)

একাদশ শ্রেণি

অধ্যায়-১ঃ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

ম্যাট্রিক্স

❖ **ম্যাট্রিক্স ঃ** সারি ও কলাম আকারে সাজানো কতগুলো সংখ্যা বা তথ্যের সমাহারকে ম্যাট্রিক্স বলে।

- একজন শিক্ষার্থীর পড়ার রুটিন---- কলাম বরাবর ---দিন
  সারি বরাবর---বিষয়

	Sat	Sun	Mon	tues
Physics	2	3	2	4
Math	3	2	3	2
Biology	1	1	4	3
English	4	4	1	1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 x 3(3 by 3)

সারি

কলা

ভুক্তি

- ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি সংখ্যা উহার সারি এবং কলাম সংখ্যার গুনফলের সমান ।
- ম্যাট্রিক্সকে $(\quad)$, $[\quad]$, $\|\quad\|$ বন্ধনী দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

❖ **বর্গ ম্যাট্রিক্স ঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা পরস্পর সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

www.tulipkeshab.com

❖ **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স ঃ** যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা পরস্পর সমান নয়, তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **সারি ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের কেবল মাত্র একটি সারি বিদ্যমান তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

❖ **কলাম ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের কেবল মাত্র একটি কলাম বিদ্যমান তাকে কলাম ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

❖ **ম্যাট্রিক্সের ক্রম :** ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যাকে একত্রে ইহার ক্রম বলে।

- যেমন ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সারি দুটি এবং কলাম তিনটি।
- সুতরাং ইহার ক্রম $= 2 \times 3 (2 \text{ by } 3)$।

❖ **দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ করার শর্ত :** দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ ও বিয়োগ করা যাবে, যদি তাদের ক্রম সমান হয়।

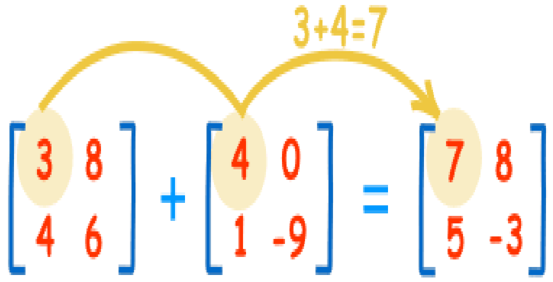
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ এবং বিয়োগ করা যাবে । কারন তাদের ক্রম সমান ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ এবং বিয়োগ করা যাবে না । কারন তাদের ক্রম সমান নয় ।

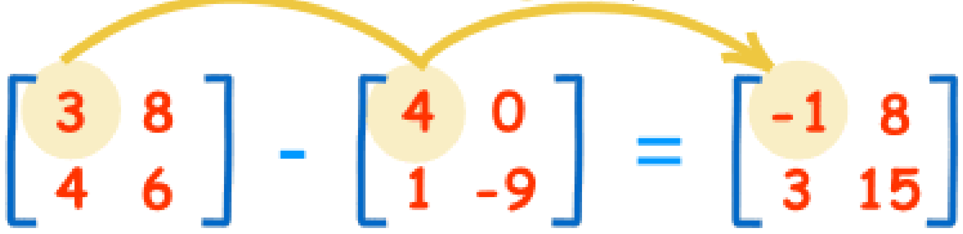
❖ ম্যাট্রিক্স এর যোগ নির্ণয় : ম্যাট্রিক্স এর সারি ও কলাম এর অনুরূপ উপাদান যোগ করে বসাতে হয়



www.tulipkeshab.com

❖ ম্যাট্রিক্স এর **বিয়োগ** নির্ণয় : ম্যাট্রিক্স এর সারি ও কলাম এর অনুরূপ উপাদান বিয়োগ করে বসাতে হয়

3-4=-1



❖ **ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স** : কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলাম আন্তঃপরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

❖ **শূন্য ম্যাট্রিক্স** : কোন ম্যাট্রিক্সের সকল ভূক্তি শূন্য হলে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ইহা ৩×৩ ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স

❖ **প্রধান কর্ণ** : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের a_{11} a_{22}.......... a_{nn} ভূক্তি নিয়ে যে কর্ণ গঠিত হয় তাকে প্রধান কর্ণ বলে ।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

→ প্রধান কর্ণ a_{11} a_{22}.........a_{33}

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} 2,1,3 \qquad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} 9,5$$

❖ **ম্যাট্রিক্সের ট্রেস** : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভূক্তি সমূহের যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলে ।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$ এই ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস হল 8+1+8=17

www.tulipkeshab.com

❖ **উর্ধ্ব ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিম্নস্থ সকল ভূক্তি শূন্য তাকে উর্ধ্ব ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **নিম্ন ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরস্থ সকল ভূক্তি শূন্য তাকে নিম্ন ত্রিভূজাকার ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **কর্ণ ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণ ব্যতীত সকল ভূক্তি শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে ।

প্রধান কর্ণ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ **স্কেলার ম্যাট্রিক্স :** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক ভূক্তি সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

❖ **একক ম্যাট্রিক্স :** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক ভূক্তি ১ তাকে একক ম্যাট্রিক্স বলে ।

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইহাকে I_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয় । $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইহাকে I_2 দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

www.tulipkeshab.com

ম্যাট্রিক্সের গুণ

❖ **দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণ :** দুটি ম্যাট্রিক্স গুণনযোগ্য হবে যদি প্রথমটির কলামের সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathrm{B}= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স গুন করা যাবে । কারন তাদের প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathrm{B}= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ এই দুটি ম্যাট্রিক্স গুন করা যাবে না ।কারন তাদের প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান নয়।

❖ গুণফল ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় :দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করলে নতুন যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে তার মাত্রা হবে প্রথমটির সারি এবং দ্বিতীয়টির কলাম সংখ্যার সমান । যেমন---

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{2 \times 2}$$

2 x 2 2 x 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \boxed{2 \times 2}$$

2 x 3 3 x 2

www.tulipkeshab.com

নির্ণায়ক

❖ **নির্ণায়ক** :যে নিয়মের দ্বারা প্রত্যেকটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের এক একটি সংখ্য বা মান পাওয়া যায় তাকে নির্ণায়ক বলে ।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 8 \\ -9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$ ইহা 3× 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স

এখানে Aএকটি 3× 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স । ইহার নির্ণায়ককে det(A) বা $|A|$ দ্বারা সূচিত করা হয় ।

অর্থাৎ $$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 8 \\ -9 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

- কেবল বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হয়।
- ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই, কিন্তু নির্ণায়কের মান আছে।
- নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা দুটি কলাম একই রকম হলে নির্ণায়কের মান 0 হয়।
- নির্ণায়কের কোন সারি বা কলামকে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে, ঐ সংখ্যা দ্বারা নির্ণায়কটিকেও গুণ করতে হয়।
- নির্ণায়কের পাশাপাশি দুটি সারি বা কলাম পরস্পর বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানকে '–' দ্বারা গুণ করতে হয়।

❖ **অনুরাশি :** নির্ণায়কের কোন ভুক্তি যে সারি বা কলামে আছে, সে সারি বা কলাম বাদ দিয়ে বাকী ভুক্তিগুলো নিয়ে যে নির্ণায়ক হয়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি বলে।

❖ **সহগুণক :** যদি অনুরাশিকে ঐ ভুক্তির চিহ্ন দ্বারা গুণ করা হয়, তবে তাকে ঐ ভুক্তির সহগুণক বলে।

- $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,এখানে M_{ij} হচ্ছে (i,j) তম অনুরাশি ।

❖ **অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স :** কোন ম্যাট্রিক্সের সহগুণক ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজকে অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলে।

- A ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্টকে $adj(A)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- $adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$
- এখানে,$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$,এখানে M_{11}হচ্ছে (1,1) তম অনুরাশি ।অনুরুপভাবে অন্যগুলো

❖ **বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের পদ্ধতি :** (অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি)

ধরি, A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স। প্রথমে ইহার নির্ণায়ক $|A|$ নির্ণয় করতে হবে। যদি $|A| \neq 0$ হয়, তবে ইহার বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা যাবে। এখন A এর অ্যাডজয়েন্ট নির্ণয় করি, তারপর $A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$ সূত্র প্রয়োগ করে A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করি।