

উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী) দ্বাদশ শ্রেণি অধ্যায়-১০ : বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাব্যতা সম্ভাব্যতা

❖ ঘটনা (Event) :

কোন পরীক্ষণের ফলাফল হল ঘটনা। অর্থাৎ, একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে H বা T উঠা এক একটি ঘটনা।

❖ ঘটনজগত বা নমুনাক্ষেত্র :

কোন পরীক্ষণ প্রসূত সকল ঘটনার সেটকে ঘটনজগত বা নমুনাক্ষেত্র বলে। নমুনাক্ষেত্রকে S দ্বারা সূচিত করা হয়।

ছকার গুটির ক্ষেত্রে নমুনাক্ষেত্র $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, মুদ্রার ক্ষেত্রে $S = \{H, T\}$ ।

- নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দু বা উপাদান কে নমুনা বিন্দু (বা, ঘটনা) বলে।

❖ স্বাধীন ঘটনা :

কোন পরীক্ষণ প্রসূত দুটি ঘটনার মধ্যে একটি ঘটনার সম্ভাবনা অপরটি ঘটনার উপর নির্ভর না করলে তাদেরকে, স্বাধীন ঘটনা বলে।

- দুটি স্বাধীন ঘটনা একত্রে ঘটনার সম্ভাব্যতা এদের পৃথক পৃথকভাবে ঘটনার সম্ভাব্যতার গুণফলের সমান।
- দু'টি স্বাধীন ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

❖ অধীন ঘটনা : কোন পরীক্ষণ প্রসূত দুটি ঘটনার মধ্যে একটি ঘটনার সম্ভাবনা অপরটি ঘটনার উপর নির্ভর করে তবে তারা অধীন ঘটনা।

- দু'টি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটনার সম্ভাব্যতা এদের যে কোন একটির সম্ভাব্যতা এবং অপরটির শর্তাধীন সম্ভাব্যতার গুণফলের সমান।
- দু'টি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

উদাহরণঃ (i) দুটি ছকার গুটি নিক্ষেপ করলে একটিতে ছকা পাওয়ার ঘটনার উপর অন্যটির ছকা পাওয়া নির্ভর করে না। ছকা পাওয়ার এ ঘটনা দুটি পরস্পর স্বাধীন।

(ii) তাসের প্যাকেট থেকে পুনঃস্থাপন না করে পর পর দুটি তাস টানা হল। ১ম টি যে কোন রং এর হতে পারে। কিন্তু ২য় তাসটি একই রং এর হওয়া নির্ভর করছে ১ম টির রং এর উপর। তাই ১ম ঘটনাটি স্বাধীন কিন্তু ২য় ঘটনাটি অধীন।

(iii) দুটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে একটিতে H পাওয়ার ঘটনা অন্যটিতে H পাওয়ার ঘটনার উপর নির্ভর করেনা, তাই ঘটনা দুটি পরস্পর স্বাধীন। (iv) দুটি থলের একটিতে 5 টি সাদা ও 4 টি লাল বল আছে। অপরটিতে 6 টি সাদা ও 5 টি লাল বল আছে। এখন, ১ম টি থেকে একটি বল তুললে সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা, ২য় টি থেকে একটি বল তুললে তার সাদা হওয়ার সম্ভাবনার উপর নির্ভর করে না। এ ক্ষেত্রে ঘটনা দুটি স্বাধীন।

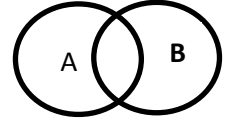
***** দুটি ভিন্ন উৎস হওয়ায় ঘটনা দুটি স্বাধীন। যদি ১ম থলে থেকে এক সাথে দুটি বল উঠানো হতো, সেক্ষেত্রে ১ম টি সাদা হওয়ার ঘটনার উপর ২য় টি সাদা হওয়ার ঘটনা নির্ভরশীল হতো।

❖ পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন ঘটনা :

কোন পরীক্ষণ প্রসূত দুই বা ততোধিক ঘটনার যে কোন একটি ঘটলে যদি অপর কোন ঘটনা না ঘটে, তবে ঘটনা গুলোকে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে।



- দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা তাদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার সমষ্টির সমান।
- A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে এবং A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A)$, B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B)$
- দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ।
- দুটি ঘটনা তখনই বর্জনশীল হয় যখন তাদের মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু না থাকে।
- A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে $A \cap B = \emptyset \therefore P(A \cap B) = 0$



❖ পরস্পর অবর্জনশীল বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনা :

কোন পরীক্ষণ প্রসূত দুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটলে যদি অপর কোন ঘটনাও ঘটতে পারে, তবে ঘটনা দুটিকে পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা বলে।

- দুটি অবর্জনশীল ঘটনার যে কোন একটি ঘটনার সম্ভাব্যতা তাদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাব্যতার সমষ্টি হতে তাদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিরোধফলের সমান।
- A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা। A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A)$, B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B)$ এবং তাদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cap B)$
- দুটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে ---
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
- দুটি ঘটনা তখনই অবর্জনশীল হয় যখন তাদের মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকে।

উদাহরণঃ ১. কোন বাক্সে লাল, নীল ও সাদা রং এর কিছু বল আছে। দৈবচয়নে তাদের মধ্য থেকে একটি বল তোলা হলে, বলটি যদি লাল হয়, তবে নীল বা সাদা হতে পারবে না। তাই বলটি লাল, নীল বা সাদা হওয়ার ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন।

২. একজন পরীক্ষার্থীর পাস করার ঘটনা A ও ফেল করার ঘটনা B হলে ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল।

৩.52 খানা তাসের প্যাকেট হতে 3 খানা তাস টানা হল। তাস তিনটির ইস্কাবন হওয়ার ঘটনা A এবং কালো রং এর হওয়ার ঘটনা B হলে, A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

*** তিন রং (লাল, নীল, সাদা) এবং 3 খানা নেওয়া হয়েছে দুই এর অধিক ঘটনা বুঝানোর জন্য।

৩. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একখানা তাস টানা হল। তাসটি হরতন হওয়ার ঘটনা A এবং গোলাম হওয়ার ঘটনা B হলে, A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

৪. ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এ ছয়টি ঘটনার কেবল একটি ঘটবে। এ 6 টি ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন।

৫. একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে H বা T কোন একটি উপরে থাকবে। অর্থাৎ 2 টি ঘটনার মধ্যে কেবল 1 টি ঘটবে। এ দুটি ঘটনা পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

*****দুটি ঘটনার মধ্যে যদি কোন সাধারণ উপাদান (ঘটনা) থাকে, তবে ঘটনাদ্বয় পরস্পর অবিচ্ছিন্ন।

যেমনঃ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ $\therefore A \cap B = \{6\}$ তাহলে, A ও B ঘটনা দুটি অবিচ্ছিন্ন।

❖ সম-সম্ভাব্য ঘটনা : কোন পরীক্ষণের ঘটনাজগতের ঘটনা গুলোর প্রত্যেকটি ঘটনার সম্ভাবনা সমান হলে, ঘটনা গুলোকে সম-সম্ভাব্য ঘটনা বলে।

যেমনঃ (i) মুদ্রার ঘটনাজগত $S = \{H, T\}$; এখন H বা T পাওয়ার সম্ভাব্যতা সমান। তাই তারা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

(ii) ছক্কার ঘটনাজগত $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ । এখন 6 টি ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনা সমান। তাই তারা সম-সম্ভাব্য ঘটনা।

***** সম-সম্ভাব্য ঘটনা সর্বদা বর্জনশীল এবং স্বাধীন।

(ii) 52 খানা তাসের মধ্যে একটি তাস টানলে সেটি টেক্কা হওয়ার ঘটনা এবং সেটি হরতন হওয়ার ঘটনা সম-সম্ভাব্য নয়।

❖ সম্ভাব্যতা :

কোন ঘটনা ঘটবে কি ঘটবে না, তার গাণিতিক পরিমাপকে সম্ভাব্যতা বলে।

সম্ভাব্যতার গাণিতিক পরিমাপ হচ্ছে, সম-সম্ভাব্য অনুকূল ঘটনা সংখ্যা এবং সম-সম্ভাব্য মোট ঘটনা সংখ্যার অনুপাত।

উদাহরণ : একটি ছক্কা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে ঘটনাজগত $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা $A = \{2, 4, 6\}$ ।

এখানে, $n(S) = 6$, $n(A) = 3$ ।

সুতরাং A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে। অর্থাৎ $0 \leq P(A) \leq 1$
- অসম্ভব ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A) = 0$
- সম্পূর্ণ এবং নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A) = 1$
- কোন ঘটনা ঘটবে না ঘটবে সমষ্টি 1। অর্থাৎ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

❖ শর্তাধীন সম্ভাব্যতা :

কোন পরীক্ষণে যদি একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা অন্য কোন ঘটনা পূর্বে ঘটেছে তার উপর নির্ভর করে, তবে এরূপ ঘটনার সম্ভাব্যতাকে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলে।

- A ঘটনাটি পূর্বে ঘটেছে এ শর্তাধীনে B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$
- B ঘটনাটি পূর্বে ঘটেছে এ শর্তাধীনে A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$

***** শর্তাধীন সম্ভাব্যতা এবং শর্তাধীন ঘটনা এক নয়।

- ❖ $P(A \cap B^c) = P(A - B)$
- ❖ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- ❖ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$
- ❖ $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
- ❖ $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

❖ দু'টি ছক্কা একত্রে নিষ্ক্ষেপ করা হলে, তাদের নমুনা ক্ষেত্র --

দু'টি ছক্কা একত্রে নিষ্ক্ষেপ করা হলে, নমুনা ক্ষেত্রটি হবে নিম্নরূপ :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

এখন, মোট নমুনা বিন্দু = 36 টি, দুটি ছয় উঠার অনূকূল নমুনা বিন্দু = 1 টি

❖ একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, তাদের নমুনা ক্ষেত্র

একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, নমুনা ক্ষেত্র নিম্নরূপ :

	1	2	3	4	5	6
HH	HH1	HH2	HH3	HH4	HH5	HH6
HT	HT1	HT2	HT3	HT4	HT5	HT6
TH	TH1	TH2	TH3	TH4	TH5	TH6
TT	TT1	TT2	TT3	TT4	TT5	TT6

এখানে, মোট নমুনা বিন্দু = 24 টি

- ❖ তাসের হিসাব : মোট তাস 52 টি ।
- ❖ তাসের স্যুট 4 টি এবং সেগুলো হল--হরতন, রুইতন, চিরকা ,ইসকা । প্রত্যেক স্যুটে 1 টি করে রাজা,রাণী,টেক্কা , গোলাম রয়েছে । অর্থাৎ রাজা 4 টি,রাণী 4 টি ,টেক্কা 4 টি, গোলাম 4 টি ।
- ❖ তাসের মধ্যে হরতন 13 টি,রুইতন 13 টি,চিরকা 13 টি,ইসকা 13 টি ।
- ❖ তাসের মধ্যে লাল তাস 26 টি ,কালো তাস 26 টি । প্রত্যেক রং এর মধ্যে 2 টি করে রাজা,রাণী,টেক্কা রয়েছে ।
- ❖ তাসের মধ্যে লাল রাজা 2 টি, কালো রাজা 2 টি ,লাল রাণী 2 টি ,কালো রাণী 2 টি ,লাল টেক্কা 2 টি,কালো টেক্কা 2 টি , লাল গোলাম 2 টি,কালো গোলাম 2 টি ।