উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
দ্বাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-৩ ঃ জটিল সংখ্যা

❖ জটিল সংখ্যা ঃ

a + ib আকারের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলে, যেখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা, i কাল্পনিক একক এবং $i = \sqrt{-1}$ ।
জটিল সংখ্যার সেটকে C দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- যদি z = a + ib হয়, তবে a কে z এর বাস্তব অংশ বা Re(z) বলা হয়। অর্থাৎ Re(z) = a
- যদি z = a + ib হয়, তবে b কে z এর কাল্পনিক অংশ বা Im(z) বলা হয়। অর্থাৎ Im(z) = b
- a + ib জটিল সংখ্যাকে (a,b) ক্রমজোড় আকারেও প্রকাশ করা যায়।

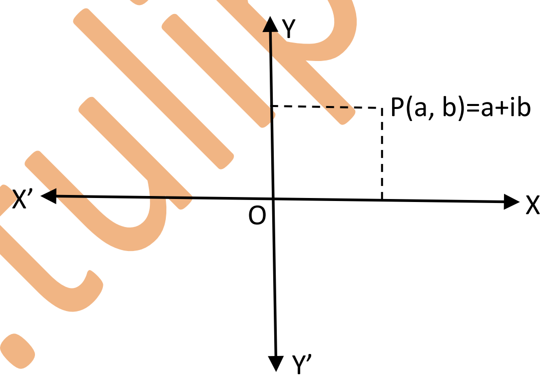
❖ জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ বা আর্গন্ড চিত্র ঃ

a + ib জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (a,b) কে বিন্দু হিসেবে বিবেচনা করে কার্তেসীয় তলে স্থাপন করা যায়।

কার্তেসীয় তলে জটিল সংখ্যার অবস্থান নির্দেশক চিত্রকে আর্গন্ড চিত্র বলা হয়।

এক্ষেত্রে x অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ বিবেচনা করা হয়।

- **a + ib জটিল সংখ্যার আর্গন্ড চিত্র নিম্নে দেওয়া হলো ঃ**



❖ জটিল সংখ্যার পোলার আকার ঃ

মনেকরি, z = x + iy একটি জটিল সংখ্যা যার প্রতিরূপ p(x,y) ।

এখন p এর পোলার স্থানাংক (r,θ) হলে, আমরা পাই, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ ।

সুতরাং z= x + iy

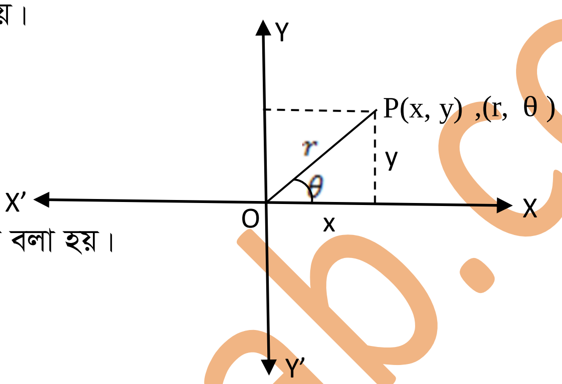
$= r\cos\theta + r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ যা z এর পোলার আকার ।

❖ জটিল সংখ্যার পরমমান (বা, মডুলাস) এবং নতি (বা, আর্গুমেন্ট) ঃ

মনেকরি, $z= x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা যার প্রতিরূপ P(x,y) । ধরি, P এর পোলার স্থানাংক (r , θ) । তাহলে,

OP = r এবং $\angle XOP = \theta$ । এখন, OP = r = $\sqrt{x^2+y^2}$ কে z এর পরমমান বা মডুলাস বলা হয় । জ্যামিতিকভাবে z এর পরমমান বলতে মূলবিন্দু থেকে z এর দূরত্বকে বুঝানো হয় ।



অর্থাৎ, $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ ।

এখন, চিত্র হতে পাই, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

$\therefore \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ কে z এর নতি বা আর্গুমেন্ট বলা হয় ।

ইহাকে argz দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

অর্থাৎ, $\arg z = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ।

❖ জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী ঃ

যদি দুটি জটিল সংখ্যার গুণফল বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে তারা একে অপরের অনুবন্ধী ।

যেমন ঃ a + ib জটিল সংখ্যাটির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হচ্ছে । কারণ $(a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$, যাহা বাস্তব সংখ্যা ।

যদি z কোন জটিল সংখ্যা হয়, তবে তার অনুবন্ধীকে $\bar{z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

- দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা z এবং $\bar{z}$এর সমষ্টি $(z+\bar{z})$ এবং গুণফল $(z\bar{z})$ উভয়ে বাস্তব সংখ্যা ।
- দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা এবং এর বিয়োগফল $(z - \bar{z})$ এবং গুণফল $(\frac{z}{\bar{z}})$ উভয়ে জটিল সংখ্যা ।

❖ জটিল সংখ্যার পরম মান(বা, মডুলাস) ও অনুবন্ধী সংক্রান্ত ধর্ম ঃ

i. $|z| = |\bar{z}|$

ii. $|z|^2 = z\bar{z}$

iii. $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$

iv. $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$

v. $\overline{z_1 + z_z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

vi. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

vii. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

viii. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

❖ কাল্পনিক একক i এর ঘাত ঃ $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$

- $i^3 = i^2 . i = -1.i = -i$

- $i^4 = i^2 . i^2$ =-1.-1=1
- $i^5 = i^2 . i^2$ .i=-1.-1.i=i

❖ **1(একক)এর ঘনমূল নির্ণয় অর্থাৎ $\sqrt[3]{1}$এর মান নির্ণয়**

মনেকরি, $\sqrt[3]{1} = x$

$\Rightarrow 1 = x^3$ (ঘন করে)

$\Rightarrow x^3 = 1$

$\Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

অথবা, $x^2 + x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1.1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

সুতরাং x এর মান সমূহ $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ, 1(একক) এর ঘনমূল সমূহ হচ্ছে, $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ।

- 1(একক) এর ঘনমূল তিনটির মধ্যে একটি বাস্তব এবং অপর দুটি জটিল এবং পরষ্পর অনুবন্ধী।
- জটিল ঘনমূল দুটির একটিকে বর্গ করলে অপরটির পাওয়া যায়।
- সুতরাং তাদের ω একটি হলে অপরটি ω^2 হবে। অতএব 1 (একক)এর ঘনমূল সমূহ হচ্ছে 1, ω , ω^2 ।

❖ **1(একক) এর ঘনমূল গুলোর ধর্ম ঃ**

i. ঘনমূল তিনটির সমষ্টি শূন্য। অর্থাৎ $1 + \omega + \omega^2 = 0$

ii. জটিল ঘনমূল দুটির সমষ্টি -1 । অর্থাৎ $\omega + \omega^2 = -1$

iii. ঘনমূল তিনটির গুণফল 1। অর্থাৎ $\omega^3 = 1$

- ❖ $\omega^4 = \omega^3 . \omega = 1 . \omega = \omega$
- ❖ $\omega^5 = \omega^3 . \omega^2 = 1 . \omega^2 = \omega^2$
- ❖ $\omega^6 = \omega^3 . \omega^3 = 1.1 = 1$
- ❖ $\omega^7 = \omega^3 . \omega^3 . \omega = \omega$