অধ্যায়-১০ঃ বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাব্যতা

বিস্তার পরিমাপ

উপাত্তের কেন্দ্রীয় প্রবণতাঃ পরিসংখ্যানের কোন উপাত্তের মানগুলোর কেন্দ্রের দিকে ঝুকে থাকার প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। যেমনঃ গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক।

বিস্তার বলতে কি বুঝায়?

উত্তরঃ কোন নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধানই হচ্ছে বিস্তার। আবার নিবেশনের মানগুলোর পারস্পরিক ব্যবধানও বিস্তার।

বিস্তার পরিমাপ বলতে কি বুঝায়?

উত্তরঃ কোন নিবেশনের উপাত্তের মানগুলোর সাথে কেন্দ্রীয় মানের বিস্তৃতির মাত্রার বা মানগুলোর পারস্পরিক বিস্তৃতির মাত্রার সংখ্যাসূচক পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলে।

বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদঃ

উত্তরঃ বিস্তার পরিমাপ দু'ধরণেরঃ (ক) পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ এবং (খ) আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ।

অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপঃ

কোন নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মান সমূহের ব্যবধানের গড় যা নিবেশনের মান সমূহের মূল এককে প্রকাশিত হয়, তাকে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ বলে। এটি চার ধরণেরঃ

(১) পরিসর, (২) গড় ব্যবধান, (৩) পরিমিত ব্যবধান ও (৪) চতুর্থক ব্যবধান।

এগুলোর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা নিচে প্রদত্ত হলোঃ

(১) পরিসরঃ পরিসর হচ্ছে বিস্তার পরিমাপের সর্বাপেক্ষা সহজ পদ্ধতি। উপাত্তের সবচেয়ে বড় মান থেকে সবচেয়ে ছোট মানের ব্যবধানই হচ্ছে পরিসর। শ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার পার্থক্যকে পরিসর বলে।

(২) গড় ব্যবধানঃ কোন উপাত্তের মানগুলো থেকে তাদের কেন্দ্রমানের (গড় বা মধ্যমা বা প্রচুরক) ব্যবধানের পরম মানের সমষ্টিকে মোট উপাত্ত সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে ঐ কেন্দ্রমান হতে মাপা গড় ব্যবধান বলে। গড় ব্যবধান বের করার সূত্রঃ

গড় ব্যবধান	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে
গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$\mathrm{MD}_{\bar{x}} = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{MD}_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\mathrm{N}}$
মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$\mathrm{MD}_{m_e} = \frac{\sum \lvert x_i - \mathrm{M_e} \rvert}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{MD}_{m_e} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \mathrm{M_e} \rvert}{\mathrm{N}}$
প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$\mathrm{MD}_{m_o} = \frac{\sum \lvert x_i - \mathrm{M_o} \rvert}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{MD}_{m_o} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \mathrm{M_o} \rvert}{\mathrm{N}}$

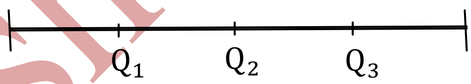
এখানে, N গণসংখ্যা নির্দেশ করে।

(৩) পরিমিত ব্যবধানঃ বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও সঠিক পরিমাপক হচ্ছে পরিমিত ব্যবধান। কোন উপাত্তের মানগুলো থেকে তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তার ধনাত্মক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে। ইহাকে σ বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পরিমিত ব্যবধান বের করার সূত্রঃ

সূত্র	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে
তাত্ত্বিক সূত্র	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$
গণনার সূত্র	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$

(৪) চতুর্থক ব্যবধানঃ উপাত্তের মানগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মানগুলি উপাত্তের মানকে সমান চার ভাগে ভাগ করে তাদেরকে চতুর্থক বলে। একটি উপাত্তে তিনটি চতুর্থক থাকে। ১ম চতুর্থক(Q_1), ২য় চতুর্থক(Q_2) ও ৩য় চতুর্থক(Q_3)।



কোন উপাত্তের ৩য় চতুর্থক থেকে ২য় চতুর্থক এবং ২য় চতুর্থক থেকে ১ম চতুর্থকের ব্যবধানের সমষ্টিকে দুই দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায়, তাকে চতুর্থক ব্যবধান বলে।

চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)}{2} = \frac{Q_3-Q_1}{2}$

i তম চতুর্থক নির্ণয় করার সূত্রঃ

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রেঃ $Q_i = \frac{\left(\frac{N\times i}{4}\right) \text{তম পদ} + \left(\frac{N\times i}{4} + 1\right) \text{তম পদ}}{2}$; যখন N জোড়

$Q_i = \frac{(N+1)\times i}{4}$ তম পদ ; যখন N বিজোড়

শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রেঃ $Q_i = L_i + \frac{\frac{N\times i}{4} - f_c}{f_a} \times C$

যেখানে, $L_i =$ i -তম চতুর্থক শ্রেণির নিম্নসীমা।

$f_c =$ i -তম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ব শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

$f_a =$ i -তম চতুর্থক শ্রেণির গণসংখ্যা।

$C =$ চতুর্থক শ্রেণির ব্যবধান।

$N =$ গণসংখ্যা।

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপঃ

কোন নিবেশনের পরম বিস্তার পরিমাপ এবং তার সাথে সম্পর্কিত কেন্দ্রীয় মান বা মান সমূহের যোগফলের অনুপাতকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে। এটি একক বিহীন সংখ্যা। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকারের। যথাঃ পরিসরাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক, বিভেদাঙ্ক ও চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক।

এগুলোর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা নিচে প্রদত্ত হলোঃ

(১) পরিসরাঙ্কঃ কোন উপাত্তের পরিসরকে তার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে পরিসরাঙ্ক বলে। ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রেঃ বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসরাঙ্ক, $\mathrm{CR} = \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \times 100$

শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রেঃ সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা $\mathrm{L_1}$ এবং সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা $\mathrm{L_n}$ হলে পরিসরাঙ্ক,

$$\mathrm{CR} = \frac{\mathrm{L_n - L_1}}{\mathrm{L_n + L_1}} \times 100$$

(২) গড় ব্যবধানাঙ্কঃ কোন নিবেশনের গড় ব্যবধান এবং তার সাথে সংশ্লিষ্ট কেন্দ্রীয় মানের অনুপাতকে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে। ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD}_{\bar{x}} = \frac{\mathrm{MD}_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100$

মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD_{me}} = \frac{\mathrm{MD_{me}}}{\mathrm{Me}} \times 100$

প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CMD_{mo}} = \frac{\mathrm{MD_{mo}}}{\mathrm{Mo}} \times 100$

(৩) বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্কঃ কোন উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক বলে। ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়। গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে $\bar{x}$ ও σ হলে বিভেদাঙ্ক, $\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

(৪) চতুর্থক ব্যবধানাঙ্কঃ কোন উপাত্তের তৃতীয় ও প্রথম চতুর্থকের পার্থক্যকে উহাদের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক বলে। ইহাকে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়। প্রথম চতুর্থক Q_1 ও তৃতীয় চতুর্থক Q_3 হলে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $\mathrm{CQD} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

ভেদাংক কাকে বলে?

উত্তরঃ কোন উপাত্তের মান গুলো থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে ভেদাংক বলে। অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধানের বর্গকে ভেদাংক বলে।

অনুশীলনী 10. A

$-2a, -a, 0, a, 2a$ সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ প্রদত্ত সংখ্যাগুলি $-2a, -a, 0, a, 2a$

$\therefore$ তাদের গড়, $\overline{x} = \frac{-2a-a+0+a+2a}{5} = 0$

গড় ব্যবধান, $MD_{\overline{x}} = \frac{\sum|x_i - \overline{x}|}{N} = \frac{|-2a-0|+|-a-0|+|0-0|+|a-0|+|2a-0|}{5} = \frac{6a}{5}$ (উত্তর)

এখন, $\sum x_i^2 = (-2a)^2 + (-a)^2 + 0^2 + (a)^2 + (2a)^2 = 10a^2$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{5} - 0} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$ (উত্তর)

নিচের উপাত্ত গুলোর পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ

16, 12, 14, 15, 18

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান, পরিসরাঙ্ক, চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

নম্বর	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্র সংখ্যা	4	6	10	25	10	6	4

সমাধানঃ প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনঃ

নম্বর (x)	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্র সংখ্যা (f)	4	6	10	25	10	6	4
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	20	45	55	61	65

$\therefore$ পরিসর, $R = 70 - 10 = 60$ (উত্তর)

পরিসরাঙ্ক, $CR = \frac{70-10}{70+10} \times 100 = \frac{60}{80} \times 100 = 75\%$ (উত্তর)

চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $CQD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

এখানে, $Q_1 = \frac{(65+1)\times 1}{4}$ তম পদ $= \frac{66}{4}$ তম পদ $= 16.5$ তম পদ

$Q_1 = 30$

16.5 তম পদের বিপরীতে x চলকের মান $= 30$, $\therefore$

আবার $Q_3 = \frac{(65+1)\times 3}{4}$ তম পদ $= \frac{66\times 3}{4}$ তম পদ $= 49.5$ তম পদ

49.5 তম পদের বিপরীতে x চলকের মান $= 50$, $\therefore Q_3 = 50$

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50-30}{2} = 10$ (উত্তর)

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $CQD = \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}\times 100 = \frac{50-30}{50+30}\times 100 = \frac{20}{80}\times 100 = 25\%$ (উত্তর)

এখন গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{40+120+300+1000+500+360+280}{65} = \frac{2600}{65} = 40$

$\therefore$ গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{N}$

$$= \frac{4|10-40| + 6|20-40| + 10|30-40| + 25|40-40| + 10|50-40| + 6|60-40| + 4|70-40|}{65}$$

$$= \frac{120+120+100+0+100+120+120}{65} = \frac{680}{65} = 10.46$$ (উত্তর)

$\therefore$ গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD_{\bar{x}} = \frac{MD_{\bar{x}}}{\bar{x}}\times 100 = \frac{10.46}{40}\times 100 = 26.15\%$ (উত্তর)

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{4(10-40)^2 + 6(20-40)^2 + 10(30-40)^2 + 25(40-40)^2 + 10(50-40)^2 + 6(60-40)^2 + 4(70-40)^2}{65}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\times 900 + 6\times 400 + 10\times 100 + 25\times 0 + 10\times 100 + 6\times 400 + 4\times 900}{65}}$$

$$= \sqrt{\frac{3600+2400+1000+0+1000+2400+3600}{65}}$$

$$= \sqrt{\frac{14000}{65}} = 14.67$$ (উত্তর)

$\therefore$ বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100 = \frac{14.67}{40}\times 100 = 36.68\%$ (উত্তর)

নিচের তথ্য ছক হতে ভেদাঙ্ক বের করঃ

পরিবারের মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা
$5-10$	3
$10-15$	5
$15-20$	10
$20-25$	8
$25-30$	2

সমাধানঃ প্রদত্ত তথ্য সারি ব্যবহার করে পাই,

মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	f_ix_i
$5-10$	3	7.5	22.5
$10-15$	5	12.5	62.5
$15-20$	10	17.5	175
$20-25$	8	22.5	180
$25-30$	2	27.5	55
	$N=\sum f_i = 28$		$\sum f_ix_i = 495$

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{495}{28} = 17.68$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{3(7.5-17.68)^2 + 5(12.5-17.68)^2 + 10(17.5-17.68)^2 + 8(22.5-17.68)^2 + 2(27.5-17.68)^2}{28}}$$

$$= \sqrt{\frac{824.11}{28}} = 5.43$$

$\therefore$ ভেদাংক, $\sigma^2 = 29.43$ (উত্তর)

নিচের তথ্য ছক হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ

মাসিক আয়(টাকা)	পরিবারের সংখ্যা
1001 – 2000	8
2001 – 3000	30
3001 – 4000	75
4001 – 5000	25
5001 – 6000	18
6001 – 7000	14

সমাধানঃ প্রদত্ত তথ্য সারি ব্যবহার করে পাই,

মাসিক আয়(হাজার টাকা)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$
1001 – 2000	8	1500.5	12004.0
2001 – 3000	30	2500.5	75015.0
3001 – 4000	75	3500.5	262537.5
4001 – 5000	25	4500.5	112512.5
5001 – 6000	18	5500.5	99009.0
6001 – 7000	14	6500.5	91007.0
	$N = \sum f_i = 170$		$\sum f_i x_i = 652085$

$$\therefore \text{ গড়, } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{652085}{170} = 3835.79$$

$$\therefore \text{ পরিমিত ব্যবধান, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\times 5453579.38 + 30\times 1782999.38 + 75\times 112419.38 + 25\times 441839.38 + 18\times 2771259.38 + 14\times 7100679.38}{170}}$$

$$= \sqrt{\frac{265888234.6}{170}} = 1250.62 \quad \text{(উত্তর)}$$

Keshab Lal Nath,BCS Edn,Lecturer in math and Ict, Chowmuhani Govt. s. a. College
Phone – 01818397079, Email : ktulip71@gmail.com, web : www.tulipkeshab.com

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ

শ্রেণি	7 – 12	12 – 17	17 – 22	22 – 27	27 – 32	32 – 37	37 – 42	42 – 47	47 – 52	52 – 57
গণসংখ্যা	3	6	11	15	19	14	12	9	5	2

সমাধানঃ প্রদত্ত নিবেশন ব্যবহার করে পাই,

শ্রেণি	গণসংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$f_i {x_i}^2$
7 – 12	3	9.5	28.5	270.75
12 – 17	6	14.5	87.0	1261.50
17 – 22	11	19.5	214.5	4182.75
22 – 27	15	24.5	367.5	9003.75
27 – 32	19	29.5	560.5	16534.75
32 – 37	14	34.5	483.5	16663.75
37 – 42	12	39.5	474.5	18723.00
42 – 47	9	44.5	400.5	17822.25
47 – 52	5	49.5	247.5	12251.25
52 – 57	2	54.5	109.0	5940.50
	$N = \sum f_i = 96$		$\sum f_i x_i = 2972$	$\sum f_i {x_i}^2 = 102654$

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2972}{96} = 30.96$

$\therefore$ ভেদাংক, $\sigma^2 = \frac{\sum f_i {x_i}^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{102654}{96} - 958.52 = 1069.31 - 958.52 = 110.79$ (উত্তর)

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{110.79} = 10.53$ (উত্তর)

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করঃ

শ্রেণি	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
গণসংখ্যা	5	12	20	8	3

সমাধানঃ উত্তরঃ 6.137

দুটি অসম রাশির গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 6 ও 9 হলে রাশি দুটি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনেকরি, রাশি দুটি যথাক্রমে x_1 ও x_2 ; যেখানে $x_1 > x_2$

তাহলে, গাণিতিক গড়, $\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = 6$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 12 \ldots\ldots\ldots..(i)$$

আবার, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{9} = 3$

কিন্তু আমরা জানি, দুটি অসমান তথ্যমানের পরিমিত ব্যবধান পরিসরের অর্ধেক।

$$\therefore \frac{x_1-x_2}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots..(ii)$$

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2x_1 = 18$

$$\Rightarrow x_1 = 9$$

$$\therefore (i) \Rightarrow x_2 = 3$$

অর্থাৎ রাশি দুটি যথাক্রমে 9 ও 3।   (উত্তর)

....